Nicht-Konvexitäten und Externalitäten als Probleme der Allokationstheorie

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften
beim Fachbereich Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin

Vorgelegt von

Dipl.-Vw. Harald Keiter

aus Oschersleben

Berlin 1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546521_0003

Nicht-Konvexitäten und Externalitäten als Probleme der Allokationstheorie

Inaugural - Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Wirtschaftswissenschaften
beim Fachbereich Wirtschaftswissenschaft
der Freien Universität Berlin

Vorgelegt von

Dipl.-Vw. Harald Keiter

aus Oschersleben

Berlin 1974

Vorsitzender des Fachbereichs:	Prof. Dr. G. Krause - Junk
Referent:	Prof. Dr. G. Krause - Junk
Korreferent:	Prof. Dr. K. Elsner
Tag der mündlichen Prüfung:	19. 12. 1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

		Seite
I	Einführung in das Thema und Gang der Analyse	5
II	Ermittlung der Bedingungen für Pareto - Optimalität in einer Volkswirtschaft ohne Externalitäten	10
	A Vorbemerkungen	10
	B Das Präferenzsystem der Haushalte	11
	C Die Technologie der Unternehmungen	13
	D Die Aufteilung der Güter	16
	E Ableitung der Pareto - Optimalbedingungen 1. und 2. Ordnung	17
	F Exkurs: Grenzraten der Substitution, zweites totales Differential einer Funktion und Konvexitätsbedingungen	32
	G Ermittlung der Pareto - Optima bei Nicht - Konvexitäten	43
	1 Vorbemerkungen	43
	2 Aggregation gleicher nicht - konvexer Indifferenzkurven	46
	3 Aggregation unterschiedlicher nicht - konvexer Funktionen	48
III	Erfüllung der Pareto - Optimalbedingungen durch ein marktwirtschaftliches System im Falle fehlender Externalitäten	52
	A Vorbemerkungen	52
	B Das Gleichgewicht im Modell der vollständigen Konkurrenz	53
	1 Das Gleichgewicht einer einzelnen Unternehmung	55
	2 Das Gleichgewicht im Produktionssektor	61
	3 Das Gleichgewicht eines Haushaltes	64
	C Exkurs: Nicht - Konvexitäten und Existenz eines Gleichgewichts	67
	D Pareto - Optimalität eines Konkurrenzgleichgewichts	69
	E Gleichgewicht und Optimalität im System der Optionsfixierung	71

IV Pareto - Optimalität und Gleichgewicht im marktwirtschaftlichen System im Falle vorliegender Externalitäten 79

A Der Begriff der Externalität 79

B Ableitung der Marginalbedingungen für Pareto - Optimalität 82

C Unmöglichkeit der Pareto - Optimalität des Systems der vollständigen Konkurrenz 88

D Pareto - Optimalität modifizierter Konkurrenzsysteme 90

1 Das Quasi - Konkurrenzsystem 90

2 Einführung eines Steuer - Subventions - Mechanismus 99

3 Ein "korrekt" dezentralisiertes System 100

4 Spieltheoretische Aspekte 102

V Optimalität bei Nicht - Konvexitäten und Externalitäten 105

A Das Beispiel von Buchanan und Kafoglis 105

B Analyse des Beispiels 107

VI Zusammenfassung 117

Literaturverzeichnis 119

I. Einführung in das Thema und Gang der Analyse

Zur Aufgabe der Wohlfahrtstheorie als normativer Wirtschaftstheorie gehört die Ermittlung der Bedingungen, bei denen eine Gesellschaft ihre maximal erzielbare Wohlfahrt erreicht hat. Die Wohlfahrtstheorie versteht diese Aufgabe üblicherweise als eine Suche nach den Bedingungen für die Maximierung einer Zielfunktion, nämlich der sozialen Wohlfahrtsfunktion (W). Diese enthält - basierend auf individualistisch-utilitaristisch-liberalistischen Wertvorstellungen [1] - als Variable nur die individuellen Wohlfahrtsindizes (U^i), wobei die Individuen selbst über die Höhe ihres Wohlfahrtsindex entscheiden sollen:

(1) $$W = W(u^1, \dots, u^n)$$

Über eine weitere Spezifizierung dieser sozialen Wohlfahrtsfunktion hat es unterschiedliche Auffassungen gegeben. Die Vertreter der älteren Wohlfahrtstheorie hatten keine Bedenken, gemäß

(2) $$\frac{\partial W}{\partial u^i} > 0$$

einen interpersonellen Wohlfahrtsvergleich durchzuführen, wobei vorausgesetzt werden muß, daß (2) zumindest kardinal interpretierbar ist. Dagegen sind die Vertreter der neueren Wohlfahrtstheorie einhellig der Ansicht, daß (2) nur ordinal interpretiert werden darf, interpersonelle Wohlfahrtsvergleiche also auf dieser Basis nicht durchgeführt werden können.
Diese Auffassung hat nun aber schwerwiegende Konsequenzen. Die Vertreter der älteren Wohlfahrtstheorie glaubten, eindeutig entscheiden zu können, welchen Zuwachs an sozialer Wohlfahrt eine zusätzliche Einheit an individueller Wohlfahrt bei den einzelnen Individuen hervorbringt. Demnach können beliebige individuelle Wohlfahrtsniveaus bezüglich ihrer Bedeutung für die soziale Wohlfahrt miteinander verglichen werden. Das sozialökonomische Optimum ist dann die Konstellation individueller Wohlfahrtsindizes, die den höchsten

---

1) Auf mögliche Widersprüche zwischen diesen Wertvorstellungen hat A.K. Sen hingewiesen. s. A.K. Sen, Collective Choice and Social Welfare, Edinbourgh-London 1970, insbesondere Kapitel 6* : The Liberal Paradox

Index der sozialen Wohlfahrt angibt.[1]

Die Vertreter der neueren Wohlfahrtstheorie können wegen der Ablehnung der Möglichkeit interpersoneller Wohlfahrtsvergleiche solche Aussagen nicht treffen. Sie können auf der Basis der von ihnen akzeptierten Wertvorstellungen nur Konstellationen vergleichen, in denen die individuelle Wohlfahrt mindestens eines Wirtschaftssubjektes höher und die individuelle Wohlfahrt keines Wirtschaftssubjektes niedriger ist. Die Differenzen zwischen den individuellen Wohlfahrtsindizes der beiden Situationen dürfen also nicht entgegengesetzt sein. Sind sie es, können die Situationen bezüglich der Höhe der sozialen Wohlfahrt nicht verglichen werden.[2] Das Kriterium der Gleichgerichtetheit der Differenzen der individuellen Wohlfahrtsindizes wird als das Kriterium der neueren Wohlfahrtstheorie schlechthin akzeptiert und als Pareto-Kriterium bezeichnet.[3] Danach ist ein Pareto-Optimum erreicht, wenn es nicht möglich ist, eine Situation zu finden, in der die Wohlfahrt eines[4] Wirtschaftssubjektes höher und die Wohlfahrt keines Wirtschaftssubjektes niedriger ist. Entsprechend ist eine Situation Pareto-besser als eine andere, wenn das Pareto-Kriterium erfüllt ist. Während das sozialökonomische Optimum der älteren Wohlfahrtstheorie eindeutig ist, gibt es bei n Wirtschaftssubjekten insgesamt (n-1) mal unendlich viele Pareto-Optima. Die Position der neueren Wohlfahrtstheorie impliziert, daß ein eindeutiges Maximum der sozialen Wohlfahrtsfunktion (1) nicht zu ermitteln ist. Allerdings ist klar, daß dieses Maximum notwendig die Eigenschaft der Pareto-Optimalität haben muß.[5]

Die Tatsache, daß beliebige Verteilungen an individueller Wohlfahrt mit Pareto-Optimalität vereinbar sein können, bedeutet, daß das Pareto-Kriterium kein Kriterium für die Vorteilhaftigkeit der Distribution, sondern ausschließlich ein Kriterium für die Vorteilhaftigkeit der Allokation ist. Die Zielsetzung des sozialökonomischen Optimums kann demnach in der paretianischen Wohlfahrtstheorie nur verfolgt werden, wenn auf irgendeine Weise sichergestellt ist,

---

1) Drückt man diesen Sachverhalt in mathematischer Terminologie aus, kann man sagen, daß die ältere Wohlfahrtstheorie den "besten" Punkt im individuellen Wohlfahrtsraum sucht. (vgl. A.K. Sen, a.a.O. S. 10)
2) Die neuere Wohlfahrtstheorie sucht also die "größten" Punkte im individuellen Wohlfahrtsraum. (A.K. Sen, a.a.O., S. 9)
3) Daher spricht man statt von neuerer Wohlfahrtstheorie häufig auch von paretianischer Wohlfahrtstheorie.
4) im Sinne von "mindestens eines"
5) Der "beste" Punkt muß notwendig auch ein "größter" Punkt sein.

daß die Verteilung richtig ist. Dies kann auf mannigfache Weise gewährleistet werden. In der paretianischen Wohlfahrtstheorie kommt jedoch den "lump-sum transfers" [1] bei der Herstellung der gewünschten Einkommensverteilung eine besondere Bedeutung zu. Damit die Trennung in den Distributionsaspekt und den Allokationsaspekt praktisch relevant ist, muß für die lump-sum-transfers angenommen werden, daß sie durchführbar sind, ohne Probleme der "feasibility" [2] aufzuwerfen. Nur dann ist es gerechtfertigt, allein den Allokationsaspekt der sozialen Optimalität zu analysieren.

Nun lassen sich auf die Eigenschaft hin, Pareto-optimale Zustände erreichen zu können, die verschiedensten Wirtschaftssysteme untersuchen. So erfüllt beispielsweise das System der vollkommenen Konkurrenz unter bestimmten Annahmen die Bedingungen für ein Pareto-Optimum. Die Pareto-Optimalität des Konkurrenzgleichgewichts prägte lange Zeit das Denken der Nationalökonomie, bis man erkannte, daß die Annahmen für die Ermittlung der Pareto-Optimalbedingungen zu restriktiv waren, das konkurrenzwirtschaftliche System aber die veränderten Bedingungen für Pareto-Optimalität in der Regel nicht mehr erfüllen kann. Die Berücksichtigung der allgemeinen Annahmen führt zu dem Ergebnis des allokativen Marktversagens. [3]

Auf der Basis der Wertvorstellungen der neueren Wohlfahrtstheorie wollen wir im folgenden versuchen, die skizzierten Überlegungen nachzuvollziehen.

Dabei spielt insbesondere der Aspekt eine Rolle, wie schwerwiegend das allokative Marktversagen aufgrund der darzustellenden Einwände ist und ob nicht möglicherweise ein anders als das konkurrenzwirtschaftliche System ausgestaltetes privatwirtschaftliches System ein allokatives Marktversagen verhindern kann.

Dazu werden wir zunächst für eine Volkswirtschaft ohne Externalitäten die Bedingungen ableiten, die erfüllt sein müssen, damit in dieser Volkswirtschaft

---

1) vgl. dazu J. de V. Graaff, Theoretical Welfare Economics, Cambridge 1967 S. 77 ff. oder S.K. Nath, A Reappraisal of Welfare Economics, London 1969 S. 44 ff oder P.A. Samuelson, The Pure Theory of Public Expenditures, in: The Review of Economics and Statistics Vol. 36 (1954) S. 388 u.a.m.

2) vgl. J. de V. Graaff, ebenda, S.K. Nath, ebenda

3) Dieses allokative Marktversagen ist ein a priori Argument für staatliche Aktivität. Es ist ein wesentlicher Aspekt der normativen Theorie der ökonomischen Aktivität des Staates.

ein Pareto-optimaler Zustand realisiert ist. Anschließend werden wir sehen, daß ein konkurrenzwirtschaftliches System im Gleichgewicht genau diese Bedingungen erfüllt, also einen Pareto-optimalen Zustand darstellt.[1] Für beide Modelle, sowohl den normativen (Pareto-Optimum) als auch den positiven Aspekt (Gleichgewicht), soll dann untersucht werden, welche Effekte von Nicht-Konvexitäten ausgehen und welche Modifikationen vorzunehmen sind. Insbesondere soll die Frage interessieren, ob Nicht-Konvexitäten zum allokativen Versagen des konkurrenzwirtschaftlichen Systems führen, wobei allokatives Marktversagen bedeutet, daß das betrachtete Wirtschaftssystem nicht in der Lage ist, die Bedingungen für ein Pareto-Optimum zu realisieren. Ferner ist zu fragen, ob, falls das konkurrenzwirtschaftliche System tatsächlich allokativ versagen sollte, es dann nicht ein anderes marktwirtschaftliches System gibt, das in der Lage ist, trotz Vorliegens von Nicht-Konvexitäten Pareto-optimale Zustände zu realisieren.

In einem weiteren Teil werden die gleichen Überlegungen für eine Volkswirtschaft mit Externalitäten angestellt.

In einem letzten Teil schließlich soll interessieren, welche Probleme durch das gemeinsame Vorliegen von Nicht-Konvexitäten und Externalitäten entstehen. Dies soll an einem Beispiel erläutert werden.

Unsere Modelle werden in vieler Hinsicht restriktiv sein. So werden alle Modelle in statischer Analyse dargestellt. Damit lassen wir die sehr relevanten Probleme, ob ein Gleichgewicht überhaupt und in welcher Zeit erreicht, ob es lokal oder global stabil ist, außerhalb der Betrachtung.[2] Ferner soll vollständige Information angenommen werden, die Informationsbeschaffung ist kostenlos.[3]

---

1) Wir halten es aus zwei Gründen für sinnvoll, das Modell einer Volkswirtschaft ohne Externalitäten zunächst und selbständig darzustellen, und nicht nur als einen Spezialfall des umfassenden Modells mit Berücksichtigung von Externalitäten zu erwähnen. Denn zum einen war es dieses Modell, das für lange Zeit das Denken der Nationalökonomen prägte. So leiten die Liberalen des "laissez-faire" an ihm ihre Thesen ab. Das Modell besitzt also einen eigenen politischen Stellenwert. Zum anderen erscheint es angebracht, möglichst lange mit einfachen Formeln zu argumentieren.

2) Die statischen Stabilitätsbedingungen, (J.R. Hicks, Value and Capital, 2. Auflage, Oxford 1957 S. 315 ff. P.A. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Cambridge 1963 S. 270 ff.) die nichts anderes sind als die Konvexitätsbedingungen, werden wir jedoch automatisch mit analysieren. Der statische Charakter der Modelle kann daher gerechtfertigt werden.

3) Auf Ausnahmen wird hingewiesen.

II. Ermittlung der Bedingungen für Pareto-Optimalität in einer Volkswirtschaft ohne Externalitäten

A Vorbemerkungen

Es werden im folgenden Modelle einer Volkswirtschaft untersucht, die aus $n + m$[1] Wirtschaftseinheiten ($i = 1 \ldots n$ konsumierenden[2] (Haushalten) und $j = 1 \ldots m$ produzierenden[3] Wirtschaftseinheiten (Unternehmungen) besteht. In dieser Volkswirtschaft gibt es e ($k = 1 \ldots e$) verschiedene physische und nicht-physische Güter und Faktoren.[4]

In den folgenden Abschnitten wollen wir die im einzelnen für die konsumierenden und produzierenden Wirtschaftseinheiten zu treffenden Annahmen näher erläutern.

---

1) Damit unterstellen wir eine endliche Zahl von Wirtschaftseinheiten. Bei der Frage nach der Existenz eines Konkurrenzgleichgewichtes hat Aumann (R. J. Aumann, Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders, in: Econometrica Vol. 34 Jan. 1966 No. 1 S. 1 ff) diese Annahme ersetzt, indem er ein Kontinuum von konsumierenden Wirtschaftseinheiten unterstellt. Damit wird er zwar der Annahme eines konkurrenzwirtschaftlichen Systems der fehlenden Möglichkeit der Preisbeeinflussung gerecht, hat aber (logische) Schwierigkeiten, fixierte (endliche) Anfangsbestände auf dieses Kontinuum aufzuteilen. Darüber hinaus erscheint uns wegen der Unteilbarkeit einer Wirtschaftseinheit unsere Annahme gerechtfertigt.

2) Wir werden die Begriffe konsumierender Wirtschaftseinheiten und Haushalte synonym gebrauchen. Es ist dabei zu beachten, daß ein Haushalt aus mehreren Individuen bestehen kann. In diesem Zusammenhang kommt es jedoch nur darauf an, daß diese Individuen gemeinsame einheitliche Wirtschaftspläne aufstellen. In diesem Sinne ist nur der Haushalt insgesamt Träger ökonomischer Aktivität. Es ist daher gerechtfertigt, wenn Krause-Junk (G. Krause-Junk, Das Allokationsoptimum und das Äquivalenzprinzip der Besteuerung, unveröffentlichte Habilitationsschrift Hamburg 1969, S. 10) die Haushalte und nicht die Individuen als "Nutzenträger" in der sozialen Wohlfahrtsfunktion (1) erscheinen läßt.

3) Die Begriffe produzierende Wirtschaftseinheiten und Unternehmungen werden hier synonym verwendet. Eine Unternehmung kann dabei aus mehreren Betrieben bestehen. Entscheidend ist, daß für diese Betriebsstätten gemeinsam ein Produktionsplan aufgestellt wird.

4) Unter einem Gut soll ein nach bestimmten technischen und/oder ökonomischen Eigenschaften eindeutig zu kennzeichnender Gegenstand verstanden werden, der durch eine Zeit- und Ortsangabe weiter spezifiziert ist. Entsprechendes gilt für den Teil der Faktoren, der Gut-Eigenschaften hat. Der andere Teil der Faktoren sind die Dienst- und Arbeitsleistungen, für den die gleichen Spezifizierungen möglich sein sollen. Wenn wir im folgenden von Gütern sprechen, sollen sowohl Güter als auch Faktoren gemeint sein, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt wird.

B Das Präferenzsystem der Haushalte

Die n konsumierenden Wirtschaftseinheiten der Volkswirtschaft verbrauchen Güter und stellen Faktoren zur Verfügung. Für sie soll folgende Terminologie gelten:

x_k^i bedeutet die Menge des Gutes k, über die der Haushalt i in der betrachteten Periode verfügt, wenn $x_k^i > 0$ bzw. des Faktors k, über die der Haushalt i verfügt, wenn $x_k^i < 0$. Ein Vektor $X^i = (x_1^i \dots x_e^i)$ des e-dimensionalen Raumes wird als Verbrauchspunkt oder Verbrauchsplan des Haushalts i bezeichnet. Die Menge aller Verbrauchspunkte des Haushalts i bildet den Verbrauchsraum des Haushalts i und wird mit $\mathfrak{X}^i$ bezeichnet.

Es soll nun angenommen werden, daß jeder Haushalt i die Verbrauchspunkte X^i subjektiv bewerten kann. Das Bewertungskriterium sei die Wünschbarkeit aus der Sicht des Haushalts i: Mit zwei Verbrauchspunkten X_1^i und X_2^i konfrontiert soll der Haushalt entscheiden können, welcher der beiden Verbrauchspunkte ihm wünschenswerter erscheint oder ob beide gleich wünschenswert sind. Die formale Beziehung $X_1^i \; R^i \; X_2^i$ ist dann zu lesen als: Der Haushalt i schätzt den Verbrauchspunkt 1 als mindestens so gut wie den Verbrauchspunkt 2 ein. Die binäre Relation R^i wird als "schwache Präferenz" des Haushalts i bezeichnet.

Sie soll folgende Eigenschaften haben:[2)]

Die Anordnung soll vollständig sein.

Diese Bedingung läßt sich formal ausdrücken als:

$$X_1^i \; R^i \; X_2^i \text{ oder } X_2^i \; R^i \; X_1^i \text{ für alle } X_1^i, X_2^i \in \mathfrak{X}^i$$

Die Anordnung soll transitiv sein.

Formal ausgedrückt gilt:

Wenn $X_1^i \; R^i \; X_2^i$ und $X_2^i \; R^i \; X_3^i$, dann gilt

---

1) Verfügen bedeutet, daß der Haushalt im Rahmen der Gesetze und anderer anerkannter Normen die Möglichkeit hat, über die Verwendung eines Gutes autonom zu entscheiden. Krause-Junk (a.a.O. S. 30 f.) spricht im gleichen Zusammenhang von der Kontrolle über ein Gut.
Im Idealfall ist das Verfügungsrecht unabhängig von einem speziellen Wirtschaftssystem. Jedoch ist es (besonders im später zu erörternden Bereich der Produktion) durchaus denkbar, daß eine Korrelation zwischen ihnen besteht.

2) Vgl. J. Quirk - P. Saposnik, Introduction to the General Equilibrium Forts. S. 12

auch $X_1^i \; R^i \; X_3^i$ für alle $X_1^i, X_2^i, X_3^i \in \mathcal{X}^i$

Betrachten wir die beiden Eigenschaften kombiniert, so stellen wir fest, daß nicht jeder Verbrauchspunkt mit jedem anderen direkt vom Haushalt verglichen können werden muß, sondern es genügt, wenn die Vergleichbarkeit über eine Kette von Zwischengliedern gemäß Eigenschaft 2. hergestellt werden kann. [1)]

Die Anordnung soll reflexiv sein

Formal: $X_1^i \; R^i \; X_1^i$ für alle $X_1^i \in \mathcal{X}^i$

Die Relation R^i, die diese Eigenschaft aufweist, kann als "schwache Präferenz gegenüber" oder "nicht schlechter als" - Relation aufgefaßt werden. Sie stellt eine vollständige Quasi-Ordnung dar. [2)3)]

R^i ist also eine Präferenzanordnung.

Im folgenden interessiert aber nicht so sehr die Präferenzanordnung, wie sie hier beschrieben wurde, als vielmehr eine dieser Präferenzanordnung zugeordnete Präferenzfunktion U^i.

Die Präferenzfunktion soll im Gegensatz zur Präferenzanordnung, die ja eine Anordnung des $\mathcal{X}^i$ in Äquivalenzklassen in $\mathcal{X}^i$ ist, eine Abbildung des $\mathcal{X}^i$ in den Wertebereich der reellen Zahlen sein. Sie muß so konstruiert werden, daß erfüllt ist: wenn $X_1^i \; R^i \; X_2^i$, dann auch $U^i(X_1^i) \geq U^i(X_2^i)$. Nun ist aber offensichtlich nicht für jede Präferenzanordnung R^i eine Präferenzfunktion

---

Theory and Welfare Economics, New York 1968 S. 10 ff. vgl. auch G. Gäfgen, Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung 2. Auflage, Tübingen 1968, S. 145 ff.

1) vgl. R. Kuenne, The Theory of General Economic Equilibrium, Princeton 1963, S. 51

2) vgl. G. Debreu, Theory of Value, New York 1959, S. 7 f

3) Mit Hilfe der Relation R^i können zwei weitere Relationen nämlich "echte Präferenz" P^i und "Indifferenz" I^i abgeleitet werden.

Erstere gilt, wenn erfüllt ist: $X_1^i \; R^i \; X_2^i$ aber nicht $X_2^i \; R^i \; X_1^i$

letztere gilt, wenn erfüllt ist: $X_1^i \; R^i \; X_2^i$ und $X_2^i \; R^i \; X_1^i$

konstruierbar.[1] Wir müssen daher für die Verbrauchspunkte X^i noch folgende Annahme treffen: Für jeden Verbrauchsplan X_1^i seien die Mengen $\{X^i; X^i R^i X_1^i\}$ und $\{X^i; X_1^i R^i X^i\}$ geschlossen. Dieses wird als Stetigkeit der Präferenzen bezeichnet.

Sind die Präferenzen vollständig geordnet und stetig, läßt sich eine stetige, reelle, ordnungserhaltende Funktion, die Präferenzfunktion

$$(3) \qquad U^{\cdot 1} = U^{\cdot i} (x_1^1 \ldots x_e^1)$$

finden.[2] Sie läßt sich monoton zunehmend so transformieren, daß sie zweimal stetig differenzierbar nach allen Variablen x_k^i ist. Wir wissen von der Präferenzfunktion ferner, daß

$$\frac{\partial U^i}{\partial x_k^i} \gtrless 0$$ für alle k und i sein muß. Darüber hinaus wollen wir

annehmen, daß es für jedes k mindestens ein i gibt, so daß

$$(4) \qquad \frac{\partial U^i}{\partial x_k^i} > 0$$

Diese Forderung wird als Annahme der Nicht-Sättigung bezeichnet. Damit haben wir die Präferenzstruktur der Haushalte beschrieben.

C Die Technologie der Unternehmungen

Neben den n konsumierenden Wirtschaftseinheiten gibt es in der Volkswirtschaft als zweite Gruppe eine Gruppe von m produzierenden Wirtschaftseinheiten (Unternehmungen). Sie produzieren, d.h. sie transformieren bestimmte Inputs in bestimmte Outputs. Es soll $_jx_k$, die Menge des Gutes k, die die

---

1) vgl. G. Debreu, Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Readings in Mathematical Economics Vol. 1, Value Theory P. Newman (ed.) Baltimore 1968
Man denke beispielsweise an eine lexikographische Anordnung der Punkte einer Ebene.

2) vgl. G. Debreu: Theory ..., a.a.O., S. 55 ff.

Unternehmung j kontrolliert[1], einen Output, wenn ${}_jx_k > 0$, und als Menge des Faktors k einen Input angeben, wenn ${}_jx_k < 0$.[2]

Entsprechend der Symbolik bei der Präferenzstruktur heißt ein Punkt ${}_jX = ({}_jx_1 \dots {}_jx_e)$ des e-dimensionalen Raumes Produktionspunkt der Unternehmung j. Der Produktionspunkt kann entweder technologisch realisierbar sein oder aber nicht. So ist es z.B. offensichtlich nicht möglich, einen Punkt ${}_jX = ({}_jx_1 \dots {}_jx_e)$ mit ${}_jx_k \geq 0$ für alle k und ${}_jx_k > 0$ für mindestens ein k zu erreichen.[3] Dieses würde die Existenz eines "perpetuum mobile" bedeuten, womit das Phänomen der Knappheit überwunden wäre.

Die Menge ${}_jX$ aller technologisch realisierbaren Produktionspunkte ist also nur eine Teilmenge des e-dimensionalen Raumes.[4]

---

1) vgl. Fußnote 1 S. 11

2) Im Gegensatz zu den Haushalten kann bei den Unternehmungen die Möglichkeit auftreten, daß das gleiche Gut einmal als Input und einmal als Output auftaucht. So wird im Elektrizitätswerk bei der Stromproduktion auch Strom verbraucht. Wir wollen einen solchen Sachverhalt berücksichtigen, indem das Gut zwei Indizes, einen für den Input und einen für den Output, erhält.
Produktionsmittel, die ihr gesamtes Leistungspotential nicht in der betrachteten Periode abgeben, werden zweckmäßigerweise nur mit dem von ihnen abgegebenen Leistungsstrom erfaßt.

3) Vergleiche zur Unmöglichkeit des "land of Cockaigne" Tj. C. Koopmans (ed.) Activity Analysis of Production and Allocation, New York London 1964, S. 49

4) Unser Konzept erfaßt prinzipiell nur flow-Größen. Stock-Größen werden nicht als Variable aufgefaßt, sondern bestimmen nur die Produktionskoeffizienten oder andere technologische Koeffizienten. Wenn man beispielsweise das Niveau des technischen Wissens als eine solche Stock-Größe auffaßt, dann entscheidet diese Größe über die konkrete Lage eines Produktionspunktes im gegebenen Variablenraum. Aufgrund des technischen Fortschritts wird sich in einer anderen Periode ein anderer Punkt im Variablenraum ergeben; die Menge der technologisch realisierbaren Produktionspunkte variiert also im Zeitablauf.
Dieser rein dynamische Effekt bleibt jedoch bei unserer statischen Betrachtung (Ein-Perioden-Analyse) außerhalb des Interesses. Bei dem für die betrachtete Periode als konstant vorgegebenem technischen Wissen können Veränderungen im Produktionsraum nur durch Veränderungen der flow-Größen eintreten.

Innerhalb der Menge der technologisch realisierbaren Produktionspunkte spielt eine bestimmte Teilmenge eine besondere Rolle, nämlich die Menge der effizienten Produktionspunkte. Als effizienter Produktionspunkt werde ein Produktionspunkt ${}_jX_1$ bezeichnet, in Bezug auf den kein Produktionspunkt ${}_jX_2$ existiert, für den gilt: ${}_jx_k\,({}_jX_2) \geq {}_jx_k\,({}_jX_1)$ für alle k und ${}_jx_k\,({}_jX_2) > {}_jx_k({}_jX_1)$ für mindestens ein k.[1] Die Menge aller effizienten Produktionspunkte stellt daher die Grenze der Produktionsmöglichkeiten dar.

Nun ist aber eine technologisch nicht-effiziente Produktion ("Verschwendung") möglich, so daß mit dem Produktionspunkt ${}_jX_1$ auch alle Produktionspunkte ${}_jX_2$ mit ${}_jx_k\,({}_jX_2) \leqq {}_jx_k\,({}_jX_1)$ für alle k zugelassen sind[2]. Durch das so entstandene "Produktionsgebirge" können in verschiedener Weise Schnitte gelegt werden. So ergibt sich eine Produktionsfunktion als Menge aller effizienten Produktionspunkte für den Fall konstant angenommener Gütermengen ${}_jx_k \geqslant 0$ für alle k bis auf eines und variablen Faktormengen ${}_jx_k \leqq 0$ für alle k. Eine Transformationskurve ergibt sich als die Menge der effizienten Produktionspunkte bei konstant vorgegebenen Faktormengen ${}_jx_k \leqq 0$ und variablen Gütermengen ${}_jx_k \geqslant 0$. Eine Isoquante ergibt sich als die Menge aller effizienten Produktionspunkte bei konstant vorgegebenen Gütermengen ${}_jx_k \geqslant 0$ und variablen Faktormengen ${}_jx_k \leqq 0$.

Die Menge aller effizienten Produktionspunkte der Unternehmung j kann durch eine funktionale Beziehung in folgender Weise charakterisiert werden[3]

$$(5) \qquad {}_jT\,({}_jx_1 \ldots {}_jx_e) = 0$$

Für die Funktion ${}_jT$ soll gelten

$$(5') \qquad \frac{\partial\,{}_jT}{\partial\,{}_jx_k} > 0$$

und

$$(5'') \qquad {}_jT\,(0 \ldots 0) = 0$$

---

1) Die Menge der effizienten Produktionspunkte ist daher nichts anderes als die Menge der nur auf den Produktionsbereich bezogenen Pareto-Optima.
2) Diese Bedingung unterstellt beliebige Teilbarkeit aller Mengen
3) Für ineffiziente Produktionspunkte gilt sinngemäß ${}_jT\,({}_jX) < 0$

Gleichungen (5), (5') und (5'') charakterisieren die Produktionsbedingungen, die für die Unternehmung j gelten. [1)]

D Die Aufteilung der Güter

Wenn wir in den folgenden Modellen eine Volkswirtschaft betrachten, in der die von den Unternehmungen produzierten Güter auf die Haushalte und die von den Haushalten zur Verfügung gestellten Faktorleistungen auf die Unternehmungen aufgeteilt werden, muß durch eine Nebenbedingung sichergestellt sein, daß nicht mehr Güter, als produziert werden, konsumiert und daß nicht mehr Faktoren, als zur Verfügung gestellt, im Produktionsprozeß eingesetzt werden können. Diese Bedingung unterstellt, daß es keine Anfangsbestände in der Periode gibt, die abgebaut werden können, wodurch die obige Forderung umgangen werden könnte. Es muß also gelten:

(6) $\sum_{j=1}^{m} {}_{j}x_{k} \geq \sum_{i=1}^{n} x_{k}^{i}$ für alle k mit $x_{k}^{i}, {}_{j}x_{k} \geq 0$

und

(6') $\sum_{j=1}^{m} {}_{j}x_{k} \geq \sum_{i=1}^{n} x_{k}^{i}$ für alle k mit $x_{k}^{i}, {}_{j}x_{k} \leq 0$

oder

(6'') $\sum_{j=1}^{m} {}_{j}x_{k} \geq \sum_{i=1}^{n} x_{k}^{i}$ für alle k

---

1) Hingewiesen werden muß auf eine Besonderheit in unserer Terminologie. Da nicht jeder Output im technologischen Sinne ein Gut im ökonomischen Sinne ist (z.B. Schadstoffe, Rauch, Abwässer usw.), sollen diese "bads" mit einem negativen Vorzeichen versehen werden, d.h. ihre Verminderung wirkt sich wohlfahrtsvermindernd aus. Sie werden also formal wie Inputs bzw. wie Faktoren behandelt. Einen ähnlichen Vorschlag macht auch Graaff (vgl. J. de V. Graaff, a.a.O., S. 15)

Berücksichtigt man die Annahme der Nicht-Sättigung (4), dann ist selbstverständlich, daß in (6) das Gleichheitszeichen gelten muß, wenn ein Pareto-Optimum realisiert werden soll. Aus dem gleichen Grunde muß aber auch in (6') das Gleichheitszeichen gelten. In jedem Pareto-Optimum gilt also in (6'') das Gleichheitszeichen:[1)]

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{m} {}^{j}x_k = \sum_{i=1}^{n} x^{i}_k \qquad \text{für alle } k$$

Dieses ist die Nebenbedingung, die für die folgenden Modelle zu beachten ist.

E Ableitung der Pareto-Optimalbedingungen 1. und 2. Ordnung

Die Suche nach Bedingungen für ein sozialökonomisches Optimum (also die Suche nach "besten" Elementen im Wohlfahrtsraum) hatte uns wegen der fehlenden Möglichkeit einer vollständigen Spezifizierung der sozialen Wohlfahrtsfunktion (1) (Unmöglichkeit interpersoneller Wohlfahrtsvergleiche) dazu geführt, uns auf notwendige Bedingungen für das sozialökonomische Optimum zu beschränken ("maximale" Elemente im Wohlfahrtsraum). Dieses führte uns zur Akzeptierung des Pareto-Kriteriums.

An dieser Stelle soll interessieren, welche Relationen zwischen den n Präferenzfunktionen der Gleichung (3) und den m Produktionsbedingungen der Gleichung (5) bestehen müssen, damit ein Pareto-optimaler Zustand realisiert ist. Diese Fragestellung kann am geeignetsten mit Hilfe der mathematischen Methode der Maximierung einer Zielfunktion unter Nebenbedingungen gemäß dem Lagrange-Ansatz analysiert werden. Für unser Modell der Volkswirtschaft verlangt diese Methode, daß wir zur Ermittlung der Pareto-Optimalbedingungen in folgender Weise vorgehen: Wir maximieren die Präferenzfunktion irgendeines beliebigen Haushaltes (Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann Haushalt 1 gewählt werden). Nebenbedingungen sind dabei zum einen die vorgegebenen Präferenzniveaus der restlichen n-1 Haushalte, zum anderen die m Produktionsbedingungen und schließlich die e Bedingungen der vollständigen Aufteilung der Güter. Als Lösung dieses Ansatzes ergibt sich ein einziger bestimmter

---

1) vgl. auch Fußnote 1 auf S. 15

Punkt der Wohlfahrtsgrenze, also ein bestimmter maximaler Punkt. Durch Veränderung der vorgegebenen Präferenzniveaus der n-1 Haushalte lassen sich beliebig viele weitere maximale Punkte finden. Dieses Vorgehen wäre jedoch zu umständlich und hätte kaum Erkenntniswert. Das Lagrange-Verfahren gestattet aber auch,nach Eliminierung bestimmter Variabler Bedingungen abzuleiten, die unabhängig von den anfangs gewählten Präferenzniveaus der n-1 Haushalte gelten müssen.

Diese Pareto-Optimalbedingungen werden formal durch folgenden Ansatz ermittelt:

$$(8)\quad L = u^1(x_1^1 \ldots x_e^1) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left[u^i(x_1^i \ldots x_e^i) - \bar{u}^i \right]$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, {}_jT({}_jx_1 \ldots {}_jx_e)$$

$$+ \sum_{k=1}^{e} \nu_k \left(\sum_{j=1}^{m} {}_jx_k - \sum_{i=1}^{n} x_k^i \right) \rightarrow \text{Max}$$

$$\text{mit} \quad \lambda_i, \mu_j, \nu_k \geq 0$$

L wird die Lagrange-Funktion genannt. Die λ_i, μ_j und ν_k sind zunächst noch unbestimmte Multiplikatoren (Lagrange-Multiplikatoren), deren ökonomische Interpretation an dieser Stelle nicht interessiert.

Das Modell, das durch Gleichung (8) beschrieben wird, hat (n+m) e Variable der Art x_k^i bzw. ${}_jx_k$ und n-1+m+e Variable der Art λ_i, μ_j und ν_k, also insgesamt (n+m)(e+1) + e-1 Variable. Es weist n+m+e-1 Nebenbedingungen auf.

Für ein relatives inneres Maximum dieser Lagrange-Funktion lautet die notwendige Bedingung, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen (n+m) (e+1) + e-1 Variablen gleich Null werden. Damit erhält man folgendes System von Ableitungen erster Ordnung:

$$(9a)\quad \frac{\partial L}{\partial x_k^1} = \frac{\partial u^1}{\partial x_k^1} - \nu_k = 0 \qquad \text{für } k = 1 \ldots e$$

$$(9b)\quad \frac{\partial L}{\partial x_k^i} = \lambda_i \frac{\partial u^i}{\partial x_k^i} - \nu_k = 0 \qquad \text{für } i = 2 \ldots n \text{ und } k = 1 \ldots e$$

$$(9c)\quad \frac{\partial L}{\partial {}_jx_k} = -\mu_j \frac{\partial {}_jT}{\partial {}_jx_k} + \nu_k = 0 \qquad \text{für } j=1 \ldots m \text{ und } k=1 \ldots e$$

(9d) $\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = u^i(x^i_1 \dots x^i_e) - \bar{u}^i = 0$ für i=2...n

(9e) $\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -_jT(x_1 \dots x_e) = 0$ für j=1...m

(9f) $\frac{\partial L}{\partial x^i_k} = \sum_{j=1}^{m} {}_jx_k - \sum_{i=2}^{n} x^i_k = 0$ für k=1...e

Dieses System besteht aus e + (n-1) e + m e + n-1 +m+e = (n+m) (e+1) + e-1 Gleichungen. Die Zahl der Variablen und die Zahl der Gleichungen stimmen also überein. Damit kann das System prinzipiell gelöst werden.[1] Jedoch interessieren wir uns ja nicht für den Lösungspunkt, sondern für die Bedingungen, die sich nach Eliminierung der Multiplikatoren ergeben. Darüber hinaus können wegen des nur ordinalen Charakters der Präferenzfunktionen die Gleichungen des Systems (9) ökonomisch nicht interpretiert werden. Wir müssen daher auf Eigenschaften der Präferenzfunktion zurückgehen, die kardinalen Charakter haben, d.h. Eigenschaften, die einer monotonen Transformation gegenüber invariant sind. Ein solches Charakteristikum ist die Grenzrate der Substitution, also das Austauschverhältnis entlang einer Indifferenzkurve, d.h. einer Kurve mit konstantem Präferenzindex. Für eine Präferenzfunktion vom Typ der Gleichung (3) erhält man die Grenzrate der Substitution folgendermaßen. Aus

(3) $U^i = U^i(x^i_1 \dots x^i_e)$

erhält man für eine Indifferenzkurve

(3) $dU^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^i_1} dx^i_1 + \dots + \frac{\partial U^i}{\partial x^i_e} dx^i_e = 0$

Werden zwei Güter bei konstanten Mengen aller anderen Güter gegeneinander auf einer Indifferenzkurve substituiert, ergibt sich die Grenzrate der Substitu-

---

1) Gesichert ist eine Lösung durch die gleiche Zahl von Variablen und Gleichungen natürlich nicht. (vgl. z.B. R. Dorfman - P.A. Samuelson - R.M. Solow, Linear Programming and Economic Analysis, New York-London-Toronto 1958, S. 350).

tion von Gut 1 durch Gut 2:[1)]

$$(10) \qquad \frac{\partial x_1^i}{\partial x_2^i} = - \frac{\frac{\partial U^i}{\partial x_2^i}}{\frac{\partial U^i}{\partial x_1^i}}$$

Auf Grenzraten der Substitution kommt man durch Division von umgeformten Gleichungen aus dem System (9).
So erhält man aus Gleichungen aus (9a) und (9b) für zwei beliebige Haushalte s und t und zwei beliebige Güter h und g folgende Bedingungen

$$(11) \qquad \frac{\partial x_g^s}{\partial x_h^s} = \frac{\partial x_g^t}{\partial x_h^t}$$

Diese Bedingungen werden auch die Bedingungen für das paretianische Tauschoptimum[2)] bzw. die Bedingungen des isolierten Tausches[3)] genannt. Sie besagen, daß,damit ein Pareto-Optimum in Form eines relativen (inneren) Maximums[4)] vorliegt, notwendig[5)] die Grenzraten der Substitution zwischen zwei beliebigen Gütern bei zwei beliebigen Haushalten übereinstimmen müssen[6)].

---

1) Grenzraten der Substitution sind gegenüber monotonen Transformationen invariant: Sei eine beliebige monotone Transformation der Präferenzfunktion (3) gegeben: (Der Einfachheit halber wird der Index i weggelassen)

$V = V(U)$ mit $\frac{dV}{dU} > 0$

Dann ist

$$dV = \frac{dV}{dU} \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{dV}{dU} \frac{\partial U}{\partial x_e} dx_e = 0$$

und die Grenzrate der Substitution

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_2} = - \frac{\frac{dV}{dU} \frac{\partial U}{\partial x_2}}{\frac{dV}{dU} \frac{\partial U}{\partial x_1}} = - \frac{\frac{\partial U}{\partial x_2}}{\frac{\partial U}{\partial x_1}}$$

Damit ist die Invarianz bewiesen.

2) S.K. Nath, a.a.O., S. 16 ff

3) G.Krause-Junk, a.a.O., S. 36 ff (Krause-Junk leitet sie jedoch für den Fall mit Externalitäten ab.)

4) Auf die Möglichkeit von Randoptima wird später noch eingegangen. Fort. S. 21

Aus Gleichungen aus (9c) erhält man für zwei beliebige Unternehmungen q und r und zwei beliebige Güter h und g die Bedingungen der technologischen Effizienz [1] bzw. die Bedingungen der isolierten Produktion [2]

$$(12) \qquad \frac{\partial_q x_g}{\partial_q x_h} = \frac{\partial_r x_g}{\partial_r x_h}$$

Sie besagen, daß (bei den gleichen Einschränkungen wie oben) in einem Pareto-Optimum notwendig die Grenzraten der Substitution zwischen zwei beliebigen Gütern bei zwei beliebigen Unternehmungen übereinstimmen müssen. [3]
Aus Gleichungen aus (9c) und (9b) oder (9a) ergeben sich für eine beliebige Unternehmung r und einen beliebigen Haushalt s und zwei beliebige Güter h und g schließlich die Bedingungen des Gesamtoptimums [4] bzw. die Bedingungen der integrierten Volkswirtschaft [5]

$$(13) \qquad \frac{\partial_r x_g}{\partial_r x_h} = \frac{\partial x_g^s}{\partial x_h^s}$$

Sie besagen, daß (bei den gleichen Einschränkungen wie oben) in einem Pareto-Optimum notwendig die Grenzraten der Substitution zwischen zwei beliebigen Gütern bei einem beliebigen Haushalt und einer beliebigen Unternehmung übereinstimmen müssen.
Alle drei Gruppen von Optimalbedingungen können in folgender Gleichung zusammengefaßt werden

$$(14) \qquad \frac{\partial x_g^s}{\partial x_h^s} = \frac{\partial x_g^t}{\partial x_h^t} = \frac{\partial_r x_g}{\partial_r x_h} = \frac{\partial_q x_g}{\partial_q x_h}$$

---

5) Die Bedingungen zweiter Ordnung werden wir später behandeln
6) Durch die Bedingung (11) sind auch die Scitovsky-Linien charakterisiert (vgl. J.M. Henderson - R.E. Quandt, Microeconomic Theory, Tokio 1958 S. 220, J. de V. Graaff, a.a.O. S. 45) (s.u.)
1) S.K. Nath, a.a.O., S. 12
2) G. Krause-Junk, a.a.O. S. 37
3) Die Bezeichnung Grenzrate der Substitution schließt den Begriff Grenzrate der Transformation ein.
4) "Overall Paretian Optima" (S.K. Nath, a.a.O., S. 18)
5) G. Krause-Junk, a.a.O., S. 37

Dieses sind die Gleichungen, die in allgemeiner Form angeben, wann einer der (n-1) mal unendlich vielen maximalen Punkte, ein Pareto-Optimum, realisiert wird. Jedoch ist dieser Ansatz nur dann ohne Einschränkung richtig, wenn es sich um innere Punkte handelt, denn nur, wenn alle $x_k^i \neq 0$ sind, gibt es eine Umgebung, innerhalb derer ein echtes lokales relatives Maximum bestimmt werden kann. Aber in unseren Annahmen haben wir weder die Möglichkeit ausgeschlossen, daß ein Haushalt auf ein oder bis zu e-1 Güter verzichtet, noch die, daß bei einer Unternehmung nicht alle, jedoch mindestens zwei Güter in ihrer Produktionsbeziehung auftauchen. Ohne die Annahme der Nicht-Sättigung wäre sogar die Möglichkeit gegeben, daß die vollständige Aufteilung aller e Güter nicht mehr erfüllt sein muß.

Unter Berücksichtigung dieser Möglichkeiten ergeben sich bestimmte Modifikationen des Systems (9), wie sie von Kuhn und Tucker vorgeschlagen wurden: und dementsprechend auch der Pareto-Optimalbedingung (11) bis (14). System (9) nimmt dann die folgende Gestalt an:[2)]

(15a) $$\frac{\partial L}{\partial x_k^1} = \frac{\partial u^1}{\partial x_k^1} - \nu_k \leq 0 \qquad \text{für } k=1\ldots e$$

(15b) $$\frac{\partial L}{\partial x_k^i} = +\lambda_i \frac{\partial u^i}{\partial x_k^i} - \nu_k \leq 0 \qquad \text{für } i=2\ldots n \text{ und } k=1\ldots e$$

(15c) $$\frac{\partial L}{\partial_j x_k} = -\mu_j \frac{\partial_j T}{\partial_j x_k} + \nu_k \leq 0 \qquad \text{für } j=1\ldots m \text{ und } k=1\ldots e$$

(15d) $$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = u^i(x_1^i \ldots x_e^i) - \bar{u}^i \leq 0 \qquad \text{für } i=2\ldots n$$

---

1) H.W. Kuhn - A.W. Tucker, Nonlinear Programming, in: J. Neyman (ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley 1951, S. 481 ff.

2) Dieser Ansatz findet sich in etwas veränderter Form auch bei Murakami und Negishi (Y. Murakami - T. Negishi, A Note on a Formulation of External Economy, in: International Economic Review, Vol. 5, No. 3, Sept. 1964, S. 328 ff.)

(15e) $\frac{\partial L}{\partial \mu_j} = -{}_jT({}_jx_1, \dots, {}_jx_e) \geq 0$ für j=1...m

(15f) $\frac{\partial L}{\partial \nu_k} = \sum_{j=1}^{m} {}_jx_k - \sum_{i=1}^{n} x_k^i \geq 0$ für k=1...e

Nach ähnlichen Berechnungen wie oben lautet die Bedingung für die Grenzraten der Substitution (wir beschränken uns der Einfachheit halber auf die Bedingungen des optimalen Tausches):

(16) $\frac{\partial x_g^i}{\partial x_h^i} \leq \frac{\partial x_g^s}{\partial x_h^s} \leq \frac{\partial x_g^t}{\partial x_h^t}$

Es ist also mit einem Pareto-Optimum jede Konstellation der Grenzraten der Substitution zueinander vereinbar. Wir haben in (16) unterstellt, daß Haushalt s auf keins der beiden Güter, Haushalt i auf Gut g und Haushalt t auf Gut h verzichtet. Zu diesem Verfahren sind noch drei Bemerkungen erforderlich

I. Wären wir nicht gleich von der Annahme der vollständigen Aufteilung der Güter ausgegangen, so hätte sich diese Bedingung aus diesem Ansatz notwendig ergeben. Als Nebenbedingungen hätte man dann die Gleichungen

(6''') $\nu_k \left(\sum_{j=1}^{m} {}_jx_k - \sum_{i=1}^{n} x_k^i - R_k \right) = 0$ für k=1...e

erhalten, wobei R_k die Restgröße (also eine Schlupfvariable) bezeichnet. Differentiation nach R_k hätte gemäß dem Kuhn Tucker Verfahren ergeben

(15g) $\frac{\partial L}{\partial R_k} = -\nu_k \leq 0$ und $R_k \nu_k = 0$

Wegen der Annahme der Nicht-Sättigung kann ν_k nicht gleich Null sein. Daher muß R_k gleich Null sein, die Güter müssen also vollständig aufgeteilt werden.

II. Die ökonomische Interpretation der Multiplikatoren ist nach dem Verlauf der bisherigen Analyse nicht notwendig und bei ordinaler Interpretation der Präferenzfunktionen auch nicht möglich. Lediglich bei kardinaler Interpretierbarkeit der Präferenzfunktionen liegt ein Vergleich der Multiplikatoren mit den aus der Theorie des linearen Programmierens bekannten Schattenpreisen nahe. So geben die ν_k an, um wieviel die individuelle Wohlfahrt eines Haushalts steigt, wenn eine Einheit von Gut k mehr zur Verfügung steht. Die μ_j geben das Verhältnis zwischen Grenzwirkungen eines Gutes in der Präferenzfunktion der der Grenzwirkung dieses Gutes in der Produktionsbedingung j an. Die λ_i haben einen doppelseitigen Aspekt. Zum einen können sie aufgefaßt werden als im Rahmen einer Zielfunktion $Z = \Sigma \lambda_i U^i$ beliebig autonom wählbar. Dann sind Ableitungen nach den λ_i wegen ihres exogenen Charakters nicht sinnvoll. Zum anderen können sie als im Rahmen des Modells endogen zu bestimmende Größen aufgefaßt werden. Dann geben sie das Verhältnis der Grenzwirkungen eines beliebigen Gutes k auf die individuellen Wohlfahrten der Haushalte 1 und i an. Der Mischcharakter der λ's kommt in Gleichung (15d) zum Ausdruck, bei der die Ableitung nach den λ's das gleiche Vorzeichen hat wie eine Ableitung nach den "regulären Variablen", aber ein entgegengesetztes zu den Ableitungen nach den "eigentlichen Multiplikatoren".

III. Das Kuhn-Tucker Verfahren setzt die Nicht-Negativität aller Variablen voraus. Das ist in unserem Modell nicht der Fall. Jedoch wurde z.B. bei der Bedingung der vollständigen Aufteilung der Güter deutlich gemacht, daß für negative und positive Variable formal in gleicher Weise argumentiert werden kann. Wir könnten selbstverständlich auch alle negativen Variablen mit negativen Vorzeichen versehen und könnten dann nur mit positiven Variablen arbeiten.[1)]

Neben den eben dargestellten notwendigen Bedingungen für ein relatives inneres Maximum müssen noch weitere Bedingungen, die hinreichenden Bedingungen, erfüllt sein, um einen Extremwert als Maximum zu klassifizieren.[2)] Eine

---

1) vgl. Y. Murakami - T. Negishi, a.a.O., S. 330

2) Genau genommen interessieren uns nicht so sehr die notwendigen Bedingungen und die hinreichenden Bedingungen, als vielmehr die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Den Unterschied zwischen beiden kann man sich an folgendem Beispiel leicht klarmachen: $y=x^4$. Forts. S. 25

Lagrange-Funktion mit a+b Variablen, wobei a die Anzahl der Variablen in der Zielfunktion, b die Anzahl der Nebenbedingungen und b < a ist, hat dann ein relatives inneres Maximum, wenn die quadratische Form aus den zweiten Ableitungen der Lagrange-Funktion negativ definiert ist.[1] Dazu bilden wir die geränderte Matrix L''

$$(17)\quad L'' = \begin{bmatrix} L_{bb} & L_{ab} \\ L_{ab} & L_{aa} \end{bmatrix}$$

wobei L_{aa} die zweiten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den Variablen der Zielfunktion, L_{bb} die zweiten partiellen Ableitungen nach den Multiplikatoren und L_{ab} die gemischten Ableitungen angeben.

Notwendige Bedingung für einen Extremwert ist $y' = 4x^3 = 0$. Das ist bei x=0 der Fall. Die (üblicherweise) hinreichend genannten Bedingungen verlangen (im Fall des Minimums) $y'' > 0$. Hier aber gilt $y'' = 12x^2 = 0$. Mit den notwendigen Bedingungen und den hinreichenden Bedingungen allein kommen wir also nicht aus. Stattdessen müssen wir weiter differenzieren. Wenn dann die erste Ableitung, die im "extremwertverdächtigen" Punkt nicht verschwindet, von gerader Ordnung ist, liegt ein Extremwert vor. Ist die Ableitung positiv, handelt es sich um ein Minimum; ist sie negativ, in ein Maximum. Diese Bedingungen insgesamt sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen. Die hinreichenden Bedingungen und die notwendigen Bedingungen zusammen ergeben also noch nicht alle Extremwerte. Vielmehr können auch Extremwerte vorliegen, wenn $y'' = 0$ ist. Diese Punkte werden jedoch von den notwendigen und hinreichenden Bedingungen mit erfaßt. Hier gilt $y''' = 24x$, $y'''' = 24$. Also liegt in $x = 0$ ein Minimum vor. Wenn wir uns im folgenden trotzdem auf die Untersuchung der notwendigen Bedingungen und hinreichenden Bedingungen beschränken, so läßt sich das vertreten, weil und wenn die zweiten Ableitungen in extremverdächtigen Punkten nicht verschwinden. Nur falls die Ableitungen verschwinden würden, müßten wir weiter ableiten. Das Problem läßt sich aber umgehen, indem man einfach von Ableitungen 1. Ordnung und Ableitungen 2. Ordnung spricht. (vgl. R. G. D. Allen, Macroeconomic Theory, London u. a. 1968, S. 8 f., J. N. Bronstein - K. A. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, 4. Aufl. Frankfurt/M. - Zürich 1964, S. 274)

1) vgl. M. D. Intriligator, Mathematical Optimization and Economic Theory, Englewood Cliffs 1971, S. 35 f.
K. Lancaster, Mathematical Economics, London 1971, S. 52 ff.

In der für unser Modell verwendeten Lagrangefunktion (8) tauchen nur lineare Nebenbedingungen auf; daher sind sämtliche Ableitungen der Art L_{bb} gleich Null. L_{bb} ist also eine Nullmatrix der Ordnung b x b. L_{ab} ist wegen der Linearität der Restriktionen die Menge der Ableitungen der Nebenbedingungen nach den a Variablen der Zielfunktion, also eine b x a Matrix, L_{ab} ist als Transponierte entsprechend eine Matrix der Ordnung a x b. L_{aa} schließlich ist eine Matrix aus den zweiten Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den a Variablen der Zielfunktion der Ordnung a x a.

Für die Determinante bzw. die Hauptminoren der Determinante aus dieser Matrix müssen in einem relativen Maximum bestimmte Vorzeichenbedingungen erfüllt sein und zwar: Es werden die letzten a-b Hauptminoren betrachtet. Dabei muß das Vorzeichen der ersten dieser Hauptminoren gleich (-1) exp b+1 sein und für alle folgenden Hauptminoren alternieren. Für unser Modell mit (n+m+1) e+n+m-1 Variablen und n-1+e+m Nebenbedingungen bedeutet das, daß die letzten (n+m-1) (e-1) Hauptminoren im Vorzeichen alternieren müssen, wobei die erste dieser Hauptminoren des Vorzeichen (-1) exp (n+m+1) und die letzte Hauptminore (also die Gesamtdeterminante) das Vorzeichen (-1) exp (n+m) e hat.

Aus diesen Vorzeichenbedingungen kann man ablesen, daß das Vorzeichen der ersten Hauptminore durch die Zahl der Nebenbedingungen und das Vorzeichen der Gesamtdeterminante durch die Zahl der regulären Variablen bestimmt wird.

Die Matrix aus den zweiten partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion (8) hat das folgende Aussehen:[1)]

---

1) Zur Vereinfachung der Schreibweise soll gesetzt werden:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_k \partial x_h} \equiv {}^{i}_{j}L_{kh}$$

und entsprechend alle anderen Kombinationen an zweiten Ableitungen. Besteht Klarheit darüber, welcher i- bzw. j-Index bei einer Ableitung gemeint ist, so wird nur der k- bzw. h-Index geschrieben. So bedeutet z.B.

$$u^{i}_{kh} \equiv \frac{\partial^2 u^{i}}{\partial x_k \partial x_h} \quad \text{und} \quad {}^{j}T_{kh} \equiv \frac{\partial^2 {}^{j}T}{\partial x_k \partial x_h}$$

$$\tilde{L}_e =$$

Wie erläutert müssen die letzten Hauptminoren der Determinante dieser Matrix die oben angegebenen Vorzeichenbedingungen erfüllen. Dies kann aber aus ökonomischen Gründen aufgrund der nur ordinalen Eigenschaften der Präferenzfunktionen nicht überprüft werden, da beliebige monoton steigende Transformationen denkbar sind, die die Vorzeichen der U^i_{kh} gerade umkehren[1]. Wenn aber alle U^i_{kh} im Vorzeichen unbestimmt sind, sind es die Hauptminoren natürlich auch.

Aus diesem Dilemma können wieder nur Charakteristika der Präferenzfunktionen Abhilfe schaffen, die gegenüber monoton steigenden Transformationen invariant sind. Diese Charakteristika sind die Grenzrate der Substitution, wie wir oben gesehen haben, aber auch deren Änderungen[2], da diese sich auf die Darstellung der Präferenzanordnungen in Form von Äquivalenzklassen (Indiffe-

---

1) s. Fußnote 2)

2) Dieses können wir leicht sehen: Es seien die spezielle Präferenzfunktion

(*) $U = U(x_1, x_2)$

und eine beliebige monoton steigende Transformation

(**) $V = V(U)$ mit $\frac{dV}{dU} = V' > 0$ und $V'' \gtrless 0$

gegeben. Für (*) ist dann (s. Gleichung (10))

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{u_2}{u_1}, \quad \text{wobei} \quad u_k = \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad \text{für } k = 1, 2$$

und

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3 \left(u_1^2 u_{22} - 2u_1 u_2 u_{12} + u_2^2 u_{11}\right)$$

Für (**) gilt

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{v' u_2}{v' u_1} = -\frac{u_2}{u_1}$$

Also

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = -\left(\frac{1}{v'u_1}\right)^3 \Big[(v'u_1)^2(v''u_2^2 + v'u_{22}) - 2(v'u_1)(v'u_2)(v''u_1u_2 + v'u_{12}) + (v'u_2)^2(v''u_1^2 + v'u_{11})\Big]$$

und nach Vereinfachung

$$\frac{d^2x_1}{dx_2^2} = -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3 \left(u_1^2 u_{22} - 2u_1 u_2 u_{12} + u_2^2 u_{11}\right)$$

Damit ist die Invarianz der Änderung der Grenzrate der Substitution gegenüber monoton steigenden Transformationen gezeigt.
Dagegen sind die zweiten Ableitungen nicht gegenüber solchen Transformationen invariant. Es gilt nämlich beispielsweise Forts. Seite 29

renzkurven) Bezug nehmen. Mit Hilfe dieser Charakteristika kann unter gleichzeitiger Eliminierung der Lagrange-Multiplikatoren die Matrix umgeformt werden, so daß nur noch kardinal interpretierbare Größen in ihr stehen. Entsprechend dem Verfahren des sich anschließenden Exkurses erhält man eine Matrix (19) von folgender Gestalt ohne daß sich der Wert der Determinante dieser Matrix ändert: [Um die Elemente besser angeben zu können, ordnen wir gedanklich allen Zeilen und Spalten einen Index zu und zwar in folgender Reihenfolge:

$\nu_1 \cdots \nu_e \; \lambda_2 \cdots \lambda_n \; \mu_1 \cdots \mu_m \; x_1^1 \cdots x_e^1 \; x_1^2 \cdots x_e^2 \; x_1^n \cdots x_e^n \; {}_1x_1 \cdots {}_1x_e \; {}_mx_1 \cdots {}_mx_e$ Dann gibt z.B. das Element in der Zeile x_k^n und der Spalte μ_h die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 L}{\partial x_k^n \partial \mu_h}$ an. u. s. w.] Wegen der Symmetrie der Matrix zählen wir nur die Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen auf:

In den Zeilen ν_k steht jeweils in der Spalte x_k^1 eine - 1.

In den Zeilen λ_i ($i \neq 1$) steht in der Spalte x_1^i jeweils U_1^j.

In den Zeilen μ_j steht in der Spalte ${}_jx_1$ jeweils $-{}_jT_1$.

In den Zeilen x_k^i, $i \neq 1$, $k \neq 1$ und den Spalten x_h^i, $i \neq 1$, $h \neq 1$ stehen

Ausdrücke der Form

(A) $$- u_1^1 \left(\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} + \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^i \partial x_h^i} \right)$$

In den Zeilen ${}_jx_k$, $k \neq 1$ und den Spalten ${}_jx_h$, $h \neq 1$ befinden sich Ausdrücke der Form

(B) $$- u_1^1 \left(\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial_j x_k \partial_j x_h} \right)$$

$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = V'' u_1^2 + V' u_{11}$

War U_{11} positiv, kann V_{11} negativ sein und umgekehrt. Daher kann die Matrix in der Form (17) nicht analysiert werden. Natürlich können auch nicht solche Aussagen wie "Der Grenznutzen von Gut k fällt" getroffen werden.

In den Zeilen x^i_k, $i \neq 1$, $k \neq 1$ und den Spalten x^s_h, $h \neq 1$ bzw. in den Zeilen ${}_jx_k$, $k \neq 1$ und den Spalten ${}_rx_h$, $h \neq 1$ befinden sich Elemente der Form

(C) $$- u^1_1 \quad \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h}$$

Die Ausdrücke in den Zeilen x^i_k, $i \neq 1$, $k \neq 1$ und in den Spalten ${}_jx_h$, $h \neq 1$ haben die Form

(D) $$- u^1_1 \left(- \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} \right)$$

Alle anderen Elemente der Matrix sind gleich Null.

Für die Berechnung der Determinante sind weitere Vereinfachungen möglich, da insgesamt (n+m-1) (e-1) mal der Faktor $(-U^1_1)$ vor die Determinante gezogen werden kann. Durch wiederholte Anwendung des Entwicklungssatzes erhält man für den Wert der Determinante von Matrix (18) bzw. Matrix (19) den folgenden Ausdruck

(20) $$ {}_mD^n_e = (-1)^e \prod_{i=2}^{n} \left(- (u^i_1)^2 \right) \prod_{j=1}^{m} \left(- (T_1)^2 \right) (-u^1_1)^{(n+m-1)(e-1)} $$

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} + \frac{\partial^2 x^2_1}{\partial x^2_k \partial x^2_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \cdots & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} + \frac{\partial^2 x^m_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \cdots & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} \\
- \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \cdots & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} \\
\vdots & & \vdots & & \\
- \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \cdots & - \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} & \frac{\partial^2 x^1_1}{\partial x^1_k \partial x^1_h} - \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h}
\end{vmatrix}
$$

Die Matrix, die der Determinante auf der rechten Seite zugrundeliegt, hat auf ihrer Hauptdiagonalen bis auf den Faktor $(-U_1^1)$ Blöcke von Elementen der Form (A) und (B), ansonsten bis auf den Faktor $(-U_1^1)$ Elemente der Form (C) und (D).

In einem Maximum müssen sämtliche Hauptminoren der Determinante auf der rechten Seite von Gleichung (20) positiv sein. Dazu müssen im allgemeinen in den Präferenzfunktionen die "direkten" Änderungen der Grenzraten der Substitution (k=h) positiv und in den Produktionsbedingungen negativ sein, d.h. bei den Präferenzfunktionen müssen abnehmende und bei den Produktionsbedingungen zunehmende Grenzraten der Substitution vorliegen. Die "indirekten" Änderungen der Grenzraten der Substitution ($k \neq h$) können positiv oder negativ, müssen im allgemeinen jedoch absolut kleiner als die direkten sein. [1)]

Damit haben wir die notwendigen Bedingungen (Gleichung (14)) und die hinreichenden Bedingungen (Vorzeichenbedingung für die Determinante der Gleichung (20)) für ein relatives inneres Maximum, also für eine bestimmte Gruppe von Pareto-Optima, abgeleitet. Die Bedingungen sind jedoch sehr restriktiv, indem sie uneingeschränkt nur dann gelten, wenn sich alle Wirtschaftseinheiten in einem inneren Punkt ihres Verbrauchs- oder Produktionsraumes befinden, also über alle Güter verfügen. Ferner erfordern die Bedingungen, daß alle- bis auf höchstens eine - Präferenz- und Produktionsfunktionen die Konvexitätsbedingungen zumindest lokal erfüllen. Das läßt aber die Möglichkeit offen, ob nur ein "Maulwurfshügel", oder ob der "Mount Everest" beschrieben wird. [2)] Ein Pareto-Optimum muß dann möglicherweise über andere Bedingungen gefunden werden. Lediglich dann, wenn die Konvexitätsbedingungen global erfüllt sind, geben die Marginalbedingungen ein Pareto-Optimum an, sofern nicht die Verallgemeinerungen des Kuhn-Tucker-Verfahrens zutreffen.

---

1) Im folgenden Exkurs werden diese Bedingungen noch näher spezifiziert.
2) vgl. K.E. Boulding, Einführung in die Wohlfahrtsökonomik, deutsche Übersetzung in: G. Gäfgen (Hrsg.) Grundlagen der Wirtschaftspolitik, Köln-Berlin 1966, S. 100)

F Exkurs: Grenzraten der Substitution, zweites totales Differential einer Funktion und Konvexitätsbedingungen

In diesem Exkurs sollen die oben durchgeführten Umformungen innerhalb der Determinante der Matrix (18) erläutert werden. Vorher jedoch werden noch einige andere Zusammenhänge verdeutlicht.

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare (Präferenz-) Funktion

(E1) $U = U(x_1 \ldots x_e)$

Das erste totale Differential dieser Funktion lautet

(E2) $dU = U_1 dx_1 + \ldots + U_e dx_e$, wobei $U_k = \frac{\partial U}{\partial x_k}$

Um nur die ordinalen Eigenschaften der Präferenzfunktion zu verwenden, betrachten wir Indifferenzkurven

(E2') $dU = U_1 dx_1 + \ldots + U_e dx_e = 0,$

Diese Bedingung ist im folgenden als Nebenbedingung zu beachten.

Für das zweite totale Differential haben wir

(E3) $$d^2U = U_{11} dx_1^2 + \ldots + U_{ee} dx_e^2$$

$$+ 2U_{12} dx_1 dx_2 + \ldots + 2U_{e-1e}\, dx_{e-1}\, dx_e$$

wobei $$U_{kh} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_k \partial x_h} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} = U_{hk}$$

Die Bedingung dafür, daß dieses zweite totale Differential unter Beachtung der Nebenbedingungen positiv (negativ) definit ist, lautet, daß die quadratische Form aus den zweiten Ableitungen der Präferenzfunktion bestimmte Vorzeichenbedingungen erfüllt, [1] nämlich

---

1) Diese Schreibweise hatten wir oben nicht gewählt. Hier rändert die Nebenbedingung die Ableitungen unten und rechts, dort ränderten die Nebenbedingungen links und oben. Eine Spiegelung dieser Matrix an der Nebendiagonalen ist wegen der Symmetrie jedoch möglich, ohne daß der Wert der Determinante sich ändert. Die Schreibweise, die wir hier verwenden, ist jedoch die übliche, so daß wir hier nicht von ihr abweichen wollen.

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix} \underset{(>)}{\lesseqgtr} 0, \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_{23} & u_2 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} < 0 \ \ldots$$

(E4)
$$\begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1e} & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1e} & \cdots & u_{ee} & u_e \\ u_1 & \cdots & u_e & 0 \end{vmatrix} \underset{(\gtrless)}{<} 0$$

Die letzte der Determinanten von (E4) kann folgendermaßen umgeformt werden:
Man subtrahiert zunächst das $\frac{U_k}{U_1}$ - fache der ersten Zeile von der k-ten Zeile für alle $k \neq 1$. Dieses wiederholt man für die Spalten. Alle Elemente in den Zeilen und Spalten 2 ... e können nach Erweiterung mit dem Faktor $\left(\frac{U_1}{U_1}\right)^3$ umgeformt werden, so daß sich nach Division aller Zeilen durch $(-U_1)$ schließlich eine Matrix der Ordnung (e-1) x (e-1) ergibt, deren Determinante wertgleich ist der letzten Determinante in (E4). Für die Determinante dieser Matrix gilt

$$D_e = -(-u_1)^{e+1} \cdot$$

(E5)
$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3\left(u_1^2u_{22} - 2u_1u_2u_{12} + u_2^2u_{11}\right) & \cdots & -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3\left(u_1^2u_{2e} - u_1u_2u_{1e} - u_1u_eu_{12} + u_2u_eu_{11}\right) \\ \vdots & & \vdots \\ -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3\left(u_1^2u_{2e} - u_1u_2u_{1e} - u_1u_eu_{12} + u_2u_eu_{11}\right) & \cdots & -\left(\frac{1}{u_1}\right)^3\left(u_1^2u_{ee} - 2u_1u_eu_{1e} + u_e^2u_{11}\right) \end{vmatrix}$$

Durch diese Umformungen haben wir folgendes erreicht. In der Hauptdiagonalen stehen die schon bekannten[1] Änderungen der Grenzraten der Substitution $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2}$. Die anderen Ausdrücke sollen wir jetzt untersuchen.

Dazu gehen wir wieder auf die Präferenzfunktion (1) zurück. Wird bei konstanten $x_2 \ldots x_{k-1}, x_{k+1} \ldots x_e$ Gut 1 durch Gut k substituiert, gilt auf einer Indifferenzkurve

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_k} = - \frac{u_k}{u_1}$$

Bei einer Variation von x_h bei konstanten $x_2 \ldots x_{h-1}, x_{h+1} \ldots x_e$ ändert sich die Grenzrate der Substitution $\frac{\partial x_1}{\partial x_k}$ in folgender Weise

$$\text{(E6)} \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h} = - \frac{u_1 \left(u_{k1} \frac{\partial x_1}{\partial x_h} + u_{kh} \right) - u_k \left(u_{11} \frac{\partial x_1}{\partial x_h} + u_{1h} \right)}{u_1^2}$$

$$= - \left(\frac{1}{u_1} \right)^3 \left(u_1^2 u_{kh} - u_1 u_h u_{1k} - u_1 u_k u_{1h} + u_k u_h u_{11} \right)$$

Dieses ist genau das Element in Zeile (Spalte) k und Spalte (Zeile) h.[2]
(E5) kann damit umgeschrieben werden

$$\text{(E7)} \quad D_e = - \left(- u_1 \right)^{e+1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} \end{vmatrix}$$

---

1) vgl. Fußnote 2 auf S. 28

2) Die Matrix ist also symmetrisch. Dies überrascht, weil ja die Änderungen ganz verschiedener Grenzraten der Substitution in ganz verschiedenen Richtungen verglichen werden. Bedenkt man jedoch, daß auch die Matrix der Substitutionsterme symmetrisch ist, ist das Ergebnis verständlich. Die Matrix ist also das realwirtschaftliche Pendant zu der Matrix der monetären Substitutionsterme. (vgl. R. Kuenne, a.a.O. S. 100 ff., J.R. Hicks, a.a.O. S. 309 ff.)

Die Determinanten der beiden folgenden Matrizen sind also wertgleich

$$(E8)\quad \det \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1e} & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{1e} & \cdots & u_{ee} & u_e \\ u_1 & \cdots & u_e & 0 \end{pmatrix} = -(-u_1)^{e+1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} \end{pmatrix}$$

Welche Vorzeichen haben die Elemente in der Matrix von (E7)? Von den Elementen der Hauptdiagonalen ist bekannt, daß im Fall einer abnehmenden (zunehmenden) Grenzrate der Substitution gilt $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^2} > 0 \ (<0)$ für k = 2 ... e.

Für die anderen Elemente kann über das Vorzeichen nicht eindeutig entschieden werden. Für die Verhältnisse der Größenordnung zwischen den Ausdrücken

$\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^2}$ und $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h}$ kann generell auch keine Aussage getroffen werden.[1)]

Die Umrechnungen, die durch (E8) beschrieben werden können, sind nichts anderes als die Umformung einer quadratischen Form unter Einschluß der Nebenbedingung (siehe Gleichung E 4) in eine quadratische Form ohne Nebenbedingung mit einer Variablen (x_1) weniger. Bis auf den Faktor ist (E 7) deshalb nichts anderes als die Determinante der quadratischen Form, die dem zweiten totalen Differential der Funktion

$$(E9)\qquad x_1 = x_1(x_2, \cdots, x_e)$$

zugeordnet ist. Für (E9) gilt nämlich

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial x_1}{\partial x_e} dx_e$$

und

$$(E10)\qquad d^2 x_1 = \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} dx_2^2 + \cdots + \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} dx_e^2 + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} dx_2 dx_3 + \cdots + 2\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_{e-1} \partial x_e} dx_{e-1} dx_e$$

---

1) Für eine Funktion vom Cobb-Douglas-Typ

$$u = \prod_{k=1}^{e} x_k^{\alpha_k}$$

beispielsweise ist $\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^2} > \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h} > 0$

Die Koeffizienten dieses zweiten totalen Differentials sind genau die Elemente der Matrix in (E 7). Da es sich bei der Determinante (E7) um eine umgeänderte Determinante handelt, gelten für sie nicht mehr die gleichen Vorzeichenbedingungen wie bei (E 4) für einen Extremwert. Vielmehr müssen bei (E 7) die Determinanten D_e, beginnend für e=2 mit einem Pluszeichen, im Vorzeichen alternieren. Da aber bereits der Faktor vor der Determinante in Abhängigkeit von e im Vorzeichen, beginnend für e=2 mit einem Pluszeichen, alterniert, muß die Hauptminore positiv sein. Das bedeutet, daß sämtliche Hauptminoren positiv sein müssen, damit D_e im Vorzeichen alterniert. Die Bedingungen für ein Maximum der Funktion (E 1) unter der Nebenbedingung (E 2') bzw. der Funktion (E 9) lauten also

$$\text{(E 11)} \quad \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} \end{vmatrix} > 0$$

Es müssen also zumindest überall abnehmende Grenzraten der Substitution vorliegen. Darüber hinaus müssen die "direkten" Effekte (die Elemente der Hauptdiagonalen), im allgemeinen stärker sein als die "indirekten" Effekte (die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen).[1)]

Die Bedingungen (E 11) drücken aus, daß für die Funktion in Gleichung (E 9) gilt

$$\text{(E 10')} \qquad d^2x_1 > 0$$

oder daß für die Funktion in Gleichung (E 1) unter Beachtung von (E 2') gilt

$$\text{(E 3')} \quad d^2U < 0 \quad \text{und} \quad dU = 0$$

(E 10') ist die Charakteristik einer strikt konvexen Funktion und

(E 3') ist die Charakteristik einer strikt quasi-konkaven Funktion[2)].

Von einer Präferenzfunktion, für die (E 3') bzw. (E 10') gilt, wollen wir sagen,

---

1) Die oben angeführte Cobb-Douglas-Funktion erfüllt diese Bedingungen.

2) vgl. R. Kuenne, a.a.O., S. 71 u. S. 84. Läßt man zu, daß die Funktionen nur konvex bzw. quasi-konkav zu sein brauchen, muß in (E 10') das $>$ - Zeichen gesetzt werden. Das bedeutet aber auch, daß die quadratische Form (E 10) nur negativ semidefinit sein muß.

daß sie die Konvexitätsbedingungen erfüllt. [1]

Führen wir die eben dargestellten Umformungen nicht für eine Präferenzfunktion, sondern für eine Produktionsbedingung

(E 12) $$T(x_1 \dots x_e) = 0$$

durch und berücksichtigen dabei, daß in der Matrix ${}_{m}L_{e}^{n}$ der Gleichung (18) alle T_{kh} mit einem Minuszeichen stehen (der Multiplikator μ spielt für diese Umformungen keine Rolle, er wird deshalb weggelassen), dann verlangen die Optimalbedingungen, daß

(E 13) $$-\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} > 0, \quad \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_3} & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} > 0, \dots \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \cdots & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} \end{vmatrix} > 0$$

(E 13) drückt aus, daß die Funktion

(E 12') $$x_1 = x_1(x_2 \dots x_e),$$

die man durch Umwandlung der impliziten Funktion (E 12) in die explizite Funktion (E 12') erhält, [2][3] die Bedingung

(E 14) $$-d^2x_1 > 0$$

erfüllt. (E 14) ist die Charakteristik einer strikt konkaven Funktion. Von einer Produktionsfunktion, für die (E 14) gilt, wollen wir sagen, daß sie die Konvexitätsbedingungen erfüllt. [4]

---

1) Wir wollen die Konvexitätsbedingungen auch dann als erfüllt betrachten, wenn in (E 10') bzw. in (E 3') die $\leqslant$ - bzw. $\geqslant$ - Zeichen gelten.
2) Die Voraussetzungen, die dabei gemacht werden müssen, sollen erfüllt sein. (vgl. G. M. Fichtenholz, Differential- und Integralrechnung I, 2. Aufl. Berlin 1966, S. 424 ff.)
3) Die aus (E 12) abgeleitete Funktion (E 12') soll im folgenden als Produktionsfunktion bezeichnet werden.
4) Auch hier ist wieder das $\geqslant$ - Zeichen zugelassen.

Die eben durchgeführten Umformungen können nun auf die Matrix ${}_{m}L_{e}^{n}$ der Gleichung (18) angewendet werden, die sie - von den ersten k Zeilen und Spalten einmal abgesehen - aus einer größeren Anzahl der eben beschriebenen Art von Matrizen besteht. Die ersten k Zeilen und Spalten können vereinfacht werden, indem man Zeilen x_k^1 von den Zeilen x_k^i subtrahiert und zu den Zeilen ${}_{j}x_{k}$ addiert, und indem man die Spalten x_k^1 von den Spalten x_k^i subtrahiert und zu den Spalten ${}_{j}x_{k}$ addiert. Dann befindet sich in den ersten k Zeilen und Spalten nur an den Stellen x_k^1 eine -1. Alle anderen Elemente sind gleich Null. Durch diese Umformung sind aber an die Stellen (x_k^i, x_h^s) i, s ≠ 1, an die Stellen $({}_{j}x_{k}, {}_{r}x_{h})$ (zusätzlich) die Größen U_{kh}^1, an die Stellen $(x_k^i, {}_{j}x_{h})$ i ≠ 1, und an die Stellen $({}_{j}x_{k}, x_h^i)$ i ≠ 1, die Größen $-U_{kh}^1$ getreten. Die Anzahl der wie oben umzuformenden Matrizen erhöht sich dadurch erheblich. Die weiteren Umformungen verlaufen wie oben abgeleitet. Jedoch sind dabei auch die Bedingungen erster Ordnung der Gleichung (14) und die Bedingungen für die Eliminierung der Multiplikatoren

(E 15) $\lambda_i = \frac{u_k^1}{u_k^i}$ und $\mu_j = \frac{u_k^1}{{}_{j}T_k}$

zu verwenden. Man erhält so schließlich die Determinante ${}_{m}D_{e}^{n}$ der Gleichung (20). Sie erfüllt die Bedingungen der ökonomischen Interpretierbarkeit, da im Determinantenausdruck nur kardinal interpretierbare Größen, nämlich Änderungen von Grenzraten der Substitution stehen, während das Faktorprodukt nur Vorzeichen-Bedeutung hat.

Die Determinante ${}_{m}D_{e}^{n}$ muß bestimmte Vorzeichenbedingungen erfüllen: Nach der Umformung handelt es sich auf der rechten Seite nicht mehr um die Determinante von einer Matrix mit (n+m+1) · e + e-1 Zeilen und Spalten mit n+m+e-1 Nebenbedingungen, sondern um die Determinante aus einer Matrix mit (n+m-1) (e-1) Zeilen und Spalten ohne Nebenbedingung. Da der Faktor $(-U_1^1)$ mehrfach aus der Determinante herausgezogen wurde, muß die Determinante der rechten Seite nicht negativ, sondern positiv definit sein. Daher müssen z. B. folgende Bedingungen gelten

(E 16) $${}_{o}D_{2}^{2} = (-1)^2 \left(-(u_1^2)^2\right)(-u_1^1)\left(\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_2^2)^2}\right) > 0$$

d. h.

(E 16') $$\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_2^2)^2} > 0$$

oder

$$(E\ 17) \qquad {}_0D_3^2 = (-1)^3\left(-(u_1^2)^2\right)(-u_1^1)^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_2^2)^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} + \frac{\partial^2 x_1^2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} + \frac{\partial^2 x_1^2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_3^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_3^2)^2} \end{vmatrix}$$

oder schließlich

$$(E\ 18) \qquad {}_1D_3^2 = (-1)^3\left(-(u_1^2)^2\right)\left(-\left({}_1T_1\right)^2\right)(-u_1)^4 \cdot$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_2^2)^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} + \frac{\partial^2 x_1^2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} \\ \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} + \frac{\partial^2 x_1^2}{\partial x_2^2 \partial x_3^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_3^1)^2} + \frac{\partial^2 x_1^2}{(\partial x_3^2)^2} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_3^1)^2} \\ -\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} & \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_2^1)^2} - \frac{\partial^2 {}_1x_1}{({}_1\partial x_2)^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} - \frac{\partial^2 {}_1x_1}{{}_1\partial x_2\, {}_1\partial x_3} \\ -\frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} & -\frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_3^1)^2} & \frac{\partial^2 x_1^1}{\partial x_2^1 \partial x_3^1} - \frac{\partial^2 {}_1x_1}{{}_1\partial x_2\, {}_1\partial x_3} & \frac{\partial^2 x_1^1}{(\partial x_3^1)^2} - \frac{\partial^2 {}_1x_1}{({}_1\partial x_3)^2} \end{vmatrix}$$

usw.

Definiert man im 2-Güter-Fall die Größen $\frac{\partial^2 x_1^i}{(\partial x_2^i)^2}$ als K^i und bezeichnet die K^i als Konvexitätsmaße[1] der Präferenzfunktionen, dann wird in Bedingung

---

1) Das Konvexitätsmaß K steht in einem engen Zusammenhang zum Krümmungsbegriff in der Mathematik. Eine Krümmung im mathematischen Sinn ist für eine Funktion $U = U(x_1, x_2)$ definiert als

$$Kr = \frac{\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} & u_2 \\ u_1 & u_2 & 0 \end{vmatrix}}{(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}}$$

(vgl. I.N. Bronstein-K.A. Semendjajew, a.a.O., S. 205)
Zwischen Konvexitätsmaß und Krümmung besteht folgende Beziehung

$$K \cdot u_1^3 = Kr\,(u_1^2 + u_2^2)^{3/2}$$

Wegen $U_1, U_2 > 0$ haben Konvexitätsmaß und Krümmungsmaß jedoch immer das gleiche Vorzeichen, und zwar bei (quasi-) konkaven ein Pluszeichen und bei (quasi-) konvexen Funktionen ein Minuszeichen.

(E 16') festgestellt, daß im Maximum die Summe der Konvexitätsmaße der beiden Haushalte positiv sein muß.
Entsprechend hätte die Bedingung ${}_1D_2^1 > 0$ verlangt, daß

(E 16'') $\quad K^1 - {}_1K > 0, \qquad$ wobei $\quad {}_1K = \frac{\partial^2 {}_1x_1}{(\partial {}_1x_2)^2}$

daß also die Differenz der Konvexitätsmaße von Präferenzfunktion und Produktionsbedingung positiv ist.
Aus den Bedingungen (E 16') und (E 16'') können wir eine wichtige Schlußfolgerung ziehen: Ein Pareto-Optimum verlangt nicht, daß die Präferenzfunktionen und/oder Produktionsfunktionen einzeln die Konvexitätsbedingungen erfüllen, vielmehr muß dies nur ihre Summe (unter Berücksichtigung des Vorzeichens). Die Nicht-Konvexität einer Funktion kann durch entsprechend stärkere Konvexität einer anderen Funktion überkompensiert werden. Allerdings dürfen niemals zwei oder mehr Verletzungen der Konvexitätsbedingungen vorliegen, wie am 3 Haushalte - 2 Güter-Fall gezeigt werden kann. Es muß gelten

(E 19) $\quad {}_oD_2^3 > 0$

bzw.

(E 19') $\quad \begin{vmatrix} K^1 + K^2 & K^1 \\ K^1 & K^1 + K^3 \end{vmatrix} = K^1K^2 + K^1K^3 + K^2K^3 > 0$

Sind sowohl K^2 als auch K^3 negativ, ist auch (E 19') negativ, da die Elemente der Hauptdiagonalen kleiner als die der Nebendiagonalen sind. Das heißt aber: Liegen zwei oder mehr Nicht-Konvexitäten vor, gibt die Bedingung der Gleichheit der Grenzraten der Substitution mit Sicherheit nicht mehr ein Pareto-Optimum an. Ein Pareto-Optimum ist dann also notwendig durch andere Bedingungen charakterisiert.
Aber auch dann, wenn nur bei einer Funktion eine Nicht-Konvexität vorliegt, von der angenommen werden soll, daß ihr Konvexitätsmaß kleiner ist als alle anderen Konvexitätsmaße, läßt sich zeigen, daß mit steigendem n ein Pareto-Optimum nicht mehr durch die Erfüllung der Marginalbedingungen (14) erreicht wird. Die Determinante aus den Konvexitätsmaßen der n Haushalte

(E 20)
$$\begin{vmatrix} K^1 + K^2 & K^1 \\ K^1 & K^1 + K^n \end{vmatrix}$$

hat den Wert

(E 20')
$$\sum_{s=1}^{n} \prod_{i=1}^{n} \frac{K^i}{K^s}$$

Setzt man nun beispielsweise $K^i = a > 0$ für $i = 1, 3 \ldots n$ und $K^2 = b < 0$, mit $a > |b|$

dann ist

(E 21)
$$\begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & 2a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a \\ a & \cdots & a & 2a \end{vmatrix} = a^{n-2}\left(a + (n-1)b\right)$$

(E 21) besagt, daß, wie immer auch a und b ($b < 0 < a$) gewählt werden, eine Erhöhung von n schließlich dafür sorgt, daß die Bedingungen für ein Maximum nicht mehr erfüllt sind.

Dieses Resultat erscheint paradox, behauptet es doch, daß die Realisierung der Marginalbedingungen umso eher keine Pareto-Optimalität bewirkt, je mehr Funktionen, die die Konvexitätsbedingungen erfüllen, auf eine Funktion, die sie nicht erfüllt, treffen. Man bedenke aber dies: Über die Bedingung der Gleichheit der Grenzraten der Substitution ergibt sich bei vorgegebenen Präferenzniveaus durch Aggregation der jeweiligen Gütermengen die Scitovsky-Linie[1]. Diese Scitovsky-Linie weist als aggregierte Kurve ein geringeres Konvexitätsmaß auf als die individuellen Kurven. Je mehr individuelle Kurven aber aggregiert werden, umso geringer wird das Konvexitätsmaß der aggregierten Kurve, so daß das beschriebene Resultat schließlich eintreten muß.[2]

---

1) vgl. J. de V. Graaff, a.a.O., S. XII

2) Anschauliches Beispiel für diese Überlegung ist die Aggregation von gleichseitigen Hyperbeln, die wieder eine gleichseitige Hyperbel ergibt, die aber für $n \to \infty$ gegen eine Gerade (mit dem Konvexitätsmaß Null) konvergiert.

Schließlich ist noch ein möglicher Einwand zu erwähnen, der z.B. gegen (E 20) gemacht werden kann. Die Schreibweise von Determinante (E 20) legt es nahe, wegen des häufigen Vorkommens von K^1 eine Asymmetrie im Lagrange-Ansatz zu vermuten, die mit einem individualistischen Ansatz kaum zu vereinbaren wäre. Der Einwand trifft aber nicht zu, da, wie (E 20') zeigt, der Wert von (E 20) völlig symmetrisch allen Konvexitätsmaßen gegenüber ist.

Wir haben gesehen, daß für ein Maximum der Lagrange-Funktion (8) bestimmte Konvexitätsbedingungen erfüllt sein müssen. Diese Konvexitätsbedingungen verlangen, daß für eine Präferenzfunktion $d^2x_1^i > 0$ und für eine Produktionsfunktion $- d_j^2x_1 > 0$ gilt. Diesen Bedingungen entsprechen bestimmte Bedingungen für die zugeordneten quadratischen Formen. Deren Elemente sind direkte und indirekte Veränderungen von Grenzraten der Substitution. Die Konvexitätsbedingungen verlangen für eine Präferenzfunktion insbesondere, daß Indifferenzkurven konvex zum Ursprung sind. Für die Produktionsfunktionen verlangen sie, daß die Isoquanten konvex zum Ursprung verlaufen (abnehmende Grenzrate der Substitution), daß die Grenzproduktivitäten nicht steigen dürfen, daß die Transformationskurven konkav zum Ursprung sind (zunehmende Grenzrate der Transformation) und daß die realen partiellen Grenzkosten steigen.

Alle diese Größen sind unabhängig von der Wahl der speziellen ordinalen Präferenzfunktion und des Index der Produktionsbeziehungen, so daß die gewünschte kardinale Interpretierbarkeit möglich ist.

G Die Ermittlung von Pareto-Optima bei Nicht-Konvexitäten[1] in den Präferenz- und/oder Produktionsfunktionen

1. Vorbemerkungen

In den vergangenen Abschnitten haben wir notwendige und hinreichende Bedingungen dafür abgeleitet, wann ein relatives lokales Maximum der Lagrange-Funktion (8) vorliegt, das zugleich ein Pareto-Optimum darstellt. Für diese speziellen Fälle charakterisieren die Marginalbedingungen diese Pareto-Optima. Neben diesen Pareto-Optima kann es aber offensichtlich noch eine Vielzahl anderer Pareto-Optima geben, die nicht durch die Marginalbedingungen charakterisiert werden können. Wie wir nämlich bei der Darstellung des verallgemeinerten Maximierungsverfahrens gemäß dem Kuhn-Tucker-Ansatz gesehen haben, müssen nicht alle Haushalte und Unternehmungen über alle Güter verfügen. Dann ist eine Realisierung aller Marginalbedingungen erster Ordnung nicht möglich.[2] Darüberhinaus können Nicht-Konvexitäten die Realisierung der Bedingungen zweiter Ordnung verhindern. Mit dieser Möglichkeit wollen wir uns in diesem Abschnitt befassen. Vorher jedoch soll auf ein Problem hingewiesen werden, das sich bei allseitiger Erfüllung der Konvexitätsbedingungen stellt und als ein Argument für die Relevanz von Nicht-Konvexitäten gelten kann und somit deren Untersuchung rechtfertigt.

Im Lagrange-Ansatz (8) sind wir von einer bestimmten festen Zahl von Unternehmungen ausgegangen. Es blieb unerörtert, ob eine Variation dieser Anzahl[3] eine Produktionsumschichtung ermöglicht, die bei gleichen Faktorinputs

---

1) Nicht-Konvexität bedeutet, daß die Konvexitätsbedingungen, so wie sie oben abgeleitet wurden, nicht erfüllt sind.

2) Diese Möglichkeit wird bei "second best" Überlegungen behandelt. (vgl. R. G. Lipsey - K. Lancaster, The General Theory of Second Best, in: Review of Economic Studies, Vol. 24 (1956/7) S. 11 ff.)

3) Diese Frage besitzt insbesondere in Hinblick auf das unten zu erörternde Problem der Pareto-Optimalität des Konkurrenzgleichgewichts Relevanz, da ja im Konkurrenzsystem explizit von der Annahme eines freien Marktzuganges ausgegangen wird.

einen höheren Output ergeben kann, also die Möglichkeit einer Pareto-Verbesserung beinhaltet. Dies soll jetzt nachgeholt werden.

Der Einfachheit halber unterstellen wir zwei identische Produktionsfunktionen, wie sie durch Gleichung (E 12') angegeben werden, wobei mit x_1 ein Output und mit x_k ($k \neq 1$) Inputs bezeichnet werden. Die Produktionsfunktionen sollen die Konvexitätsbedingungen strikt erfüllen. Ist unter diesen Annahmen $\bar{x}_1 = x_1 (\bar{x}_2 \ldots \bar{x}_e)$ produzierbar, dann ist es auch $\alpha\ \bar{x}_1 = x_1 (\alpha \bar{x}_2 \ldots \alpha \bar{x}_e)$ für $0 \leq \alpha \leq 1$. War dabei ${}_jX = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_e)$ ein effizienter Produktionspunkt, ist es jedoch ${}_j\alpha X = (\alpha\bar{x}_1, \ldots, \alpha\bar{x}_e)$ nicht. Für $\alpha = 1/2$ bedeutet das speziell, daß mit der Inputkombination $(\frac{1}{2}\bar{x}_2, \ldots, \frac{1}{2}\bar{x}_e)$ mehr Output als $\frac{1}{2}\bar{x}_1$ produzierbar ist. Werden die Faktoren in diesem Verhältnis in den beiden Produktionsfunktionen eingesetzt, ergibt sich ein Gesamtoutput, der größer als $\bar{x}_1$ ist. Die Produktionsumschichtung allein bewirkt also eine Outputerhöhung.

Die Produktionsumschichtung kann nun beliebig oft wiederholt werden: wobei sie jedesmal eine Outputerhöhung bewirkt. Dann ist es jedoch sehr schwierig, noch ein Pareto-Optimum ermitteln zu wollen. Aus dieser Schwierigkeit helfen alternativ zwei Annahmen. Man kann einerseits die Annahme einer fest vorgegebenen Zahl von Unternehmungen aufrecht erhalten und dies mit einer irgendwie bestimmbaren (natürlichen) Höchstgrenze der Zahl der Unternehmungen begründen. Man kann andererseits aber auch eine Mindestgröße für alle Unternehmungen postulieren, eine Annahme, durch die jedoch die Konvexitätsbedingungen verletzt werden. Diesen Zusammenhang wollen wir aufzeigen.

Eine Mindestgröße der Unternehmung bedeutet, daß ein geringerer Produktionsumfang nicht effizient in dem oben beschriebenen Sinne ist. Es ist dann möglich, durch eine Zusammenlegung von zwei Unternehmungen eine Outputerhöhung zu erreichen, wobei die neue Unternehmung die Mindestgröße erreicht haben mag. Es liegt also genau der umgekehrte Sachverhalt vor wie oben. Das bedeutet, daß im Bereich vom Ursprung bis zum Output bei der Mindestgröße die Annahme der Additivität[1] gilt.

---

1) Additivität wird üblicherweise folgendermaßen definiert: Sind ${}_1X_1$ und ${}_2X_2$ realisierbare Produktionspunkte, dann ist auch der Produktionspunkt ${}_3X_3 = {}_1X_1 + {}_2X_2$ realisierbar. (vgl. G. Debreu, Theory ... a.a.O., S. 41). Wir wollen hier folgende spezielle Definition wählen: Forts. Seite 45

In diesem Bereich kann demgemäß die Konvexitätsbedingung nicht strikt gelten. Die Mindestgröße der Unternehmung wird dann durch den Produktionspunkt ${}_jX$ beschrieben, für den alle $\alpha_j X$ mit $\alpha \geq 0$, $0 \neq \alpha \neq 1$ nicht realisierbar sind. Dieser Punkt ist demnach der einzige effiziente Produktionspunkt, der gleichzeitig ein Punkt des konvexen Kegels[1] über alle Produktionspunkte mit dem Nullpunkt als Scheitelpunkt ist.[2] [3] Dieses ist der aus der Sicht des Pareto-Kriteriums optimale Produktionspunkt. Auf den gesamtwirtschaftlichen Aspekt übertragen implizieren unsere Überlegungen, daß die Produktion am effizientesten so organisiert wird, daß möglichst viele Unternehmungen im oder möglichst direkt über diesem effizeinten Produktionspunkt unter Beibehaltung der Bedingung der Gleichheit der Grenzraten der Substitution produzieren. Diese Überlegungen sind also kein Einwand gegen die Marginalbedingungen als solche (sie gelten, von Auswirkungen der Nicht-Konvexitäten abgesehen, auch nach der Variation der Zahl der Unternehmungen), sondern sie sollten nur den Charakter der Notwendigkeit der Marginalbedingungen verdeutlichen.

Unsere Überlegungen haben gezeigt, daß Nicht-Konvexitäten von nicht unerheblicher Relevanz sein dürften, so daß die Ableitung von konkreten Bedingungen für Pareto-Optimalität in diesen Fällen unbedingt erforderlich ist. Dazu bietet es sich an, das Problem, Pareto-Optima zu finden, anders darzustellen, als es bisher geschehen ist. Ein Pareto-Optimum kann bei Vorliegen allseitiger Konvexitäten gefunden werden als der Punkt im Güterraum, in dem sich eine Scitovsky-Indifferenzkurve und die gesamtwirtschaftliche Transformationskurve tangieren. Beide Kurven werden gefunden durch Aggregation der bei

---

Additivität liegt in einem bestimmten Bereich der Produktionsfunktion vor, wenn mit ${}_jX_1$ aus diesem Bereich auch $\alpha\ {}_jX_1$ realisierbar ist für $\alpha \geq 1$ und solange auch $\alpha_j X_1$ diesem Bereich angehört.

1) Ein konvexer Kegel (C) mit dem Scheitelpunkt Null ist folgendermaßen definiert: Für alle $X \in C$ ist auch $\alpha X \in C$ für $\alpha \geq 0$. (G. Debreu, Theory ..., a.a.O., S. 21)
2) Für eine überall strikt konvexe Menge gibt es (außer dem Nullpunkt) keinen solchen effizienten Punkt.
3) Von diesem Punkt sagt man auch, es sei der Punkt mit der größten Durchschnittsproduktivität in einer Produktionsfunktion, die einen ertragsgesetzlichen Verlauf aufweist.

gleichen Grenzraten der Substitution von den Haushalten bzw. Unternehmungen realisierten Verbrauchs- bzw. Produktionspunkte. Bei allseitigen Konvexitäten sind auch diese Kurven konvex.[1] Ihre Summe erfüllt dann analog zu (E 16'') die Konvexitätsbedingungen.

2. Aggregation gleicher nicht-konvexer Indifferenzkurven

Nach diesen Vorüberlegungen sollen nun Pareto-Optimalbedingungen bei Vorliegen von Nicht-Konvexitäten abgeleitet werden. Dazu gehen wir aus von einer Gruppe, die aus einer beliebig großen Zahl von Haushalten (n) bestehen soll. Für jeden Haushalt wird von einer einem vorgegebenen Präferenzniveau entsprechenden Indifferenzkurve ausgegangen, die der Einfachheit halber für alle Haushalte gleich sein und durchgängig, d.h. in allen ihren Punkten, nicht-konvex sein soll. Aus diesen Indifferenzkurven soll die Scitovsky-Indifferenzkurve, oder, um den gleichen Maßstab wie bei den individuellen Haushalten zu haben, deren $\frac{1}{n}$ -Faches gebildet werden. Die so modifizierte Scitovsky-Indifferenzkurve hat dann natürlich die gleichen Abschnitte auf den Güterachsen wie alle individuellen Indifferenzkurven. Wir wollen zeigen, daß sie nicht mehr nicht-konvex ist und beliebig gut durch eine Ebene approximiert werden kann.[2] Jeder Punkt dieser Ebene ist bestimmbar als Linearkombination der Abschnitte der Güterachsen mit der Gewichtung $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_e)$, wobei ε der Gewichtungsvektor und die ε_k die Gewichtungskoeffizienten für die Abschnitte der Güterachsen sind. Die Koeffizienten erfüllen die Bedingung

$$(21) \qquad \varepsilon_k \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{e} \varepsilon_k = 1$$

Wenn die modifizierte Scitovsky-Indifferenzkurve durch eine Ebene approximiert werden kann, muß jeder Vektor ε durch eine entsprechende Aufteilung der n Haushalte der Gruppe erreicht werden können. Dazu wählen wir zunächst e verschiedene natürliche Zahlen n_k derart, daß für jedes n_k gilt

---

1) vgl. J.M. Henderson - R.E. Quandt, a.a.O., S. 220
Siehe auch Fußnote 2 auf S. 41

2) vgl. für das folgende E. Malinvaud, Lectures on Microeconomic Theory, Amsterdam - London - New York 1972, S. 165 ff.

(22) $\left| n_k - \varepsilon_k \cdot n \right| < 1$ und $\sum_{k=1}^{e} n_k = n$

Die Wahl solcher n_k ist sicher möglich.[1] Mit dieser Wahl der Gruppenaufteilung der n Haushalte ergibt sich ein durchschnittlicher Verbrauchspunkt aller Haushalte

(23) $X_\alpha = \left(\frac{n_1}{n} x_1, \cdots, \frac{n_e}{n} x_e \right)$

Der gemäß ε zu erreichende durchschnittliche Verbrauchspunkt ist jedoch

(24) $X_w = (\varepsilon_1 x_1, \cdots, \varepsilon_e x_e)$

Die k-te Komponente in (23) weicht von der in (24) um den folgenden Betrag ab

(25) $\bar{D}_k = \left(\frac{n_k}{n} - \varepsilon_k \right) x_k \leq \left| \frac{n_k}{n} - \varepsilon_k \right| \cdot \left| x_k \right|$

Wegen (22) konvergiert $\left| \frac{n_k}{n} - \varepsilon_k \right|$ und damit auch $\bar{D}_k$ bei steigendem n gegen Null. Damit ist gezeigt, daß jeder Verbrauchspunkt der Ebene, die durch die e Abschnitte auf den Güterachsen geht, durch eine entsprechende Gewichtung von realisierbaren Verbrauchspunkten bei steigendem n beliebig nahe erreicht werden kann. Die auf diese Weise erreichbaren durchschnittlichen Verbrauchspunkte approximieren die konvexe Hülle[2] der zugrunde gelegten Indifferenzkurve beliebig gut, d.h. die konvexe Hülle ist dicht[3]. Da aber die konvexe Hülle konvex

---

1) Ist z.B. $n \varepsilon_k$ ganzzahlig, dann ist n_k selbstverständlich gleich $n \varepsilon_k$. Ist $n \cdot \varepsilon_k$ nicht ganzzahlig, dann ist n_k entweder gleich dem natürlichen Teil m_k von $n \cdot \varepsilon_k$ oder aber gleich $m_k + 1$. Wird n_k beispielsweise für alle k gleich m_k gesetzt, dann ist $\sum n_k < n$, aber höchstens um e kleiner, also z.B. um e_1. Dann müssen, um die Bedingung $\sum n_k = n$ zu erfüllen, gerade e_1 n_k gleich $m_k + 1$ gesetzt werden.

2) Die konvexe Hülle einer Menge M von Verbrauchspunkten des Verbrauchsraumes X ist die Menge aller Verbrauchspunkte X, für die gilt $X = \sum \alpha_k X_k$ wobei $\sum \alpha_k = 1$, $0 \leq \alpha_k \leq 1$ und $X_k \in M$ (vgl. E. Malinvaud, a.a.O., S. 166)

3) Eine Punktmenge heißt dicht, wenn es zu jedem Punkt dieser Menge in beliebiger Umgebung einen weiteren Punkt dieser Menge gibt. (H. Meschkowski, Mathematisches Begriffswörterbuch, 2. Aufl., Mannheim 1966, S. 53)

ist, haben wir gezeigt, daß die modifizierte Scitovsky-Indifferenzkurve konvex ist. Aus einer Schar nicht konvexer Indifferenzkurven ergibt sich also eine durchschnittliche Scitovsky-Kurve, die die Konvexitätsbedingungen erfüllt. Dieses Ergebnis ist interessant, besagt es doch, daß durch Aggregation die individuellen Nicht-Konvexitäten aufgehoben werden.

3. Aggregation unterschiedlicher nicht-konvexer Funktionen

Die Annahme gleicher Indifferenzkurven ist sehr restriktiv. Wir wollen sie aufgeben und stattdessen annehmen, daß die n Haushalte insgesamt u verschiedene Gruppen [1] von Indifferenzkurven haben, die jedoch durchgängig nichtkonvex sein sollen. Wir haben gesehen, daß es für jede der u Gruppen eine linear verlaufende modifizierte Indifferenzkurve vom Scitovsky-Typ gibt. Diese u verschiedenen Indifferenzkurven sind nun zu einer modifizierten gesellschaftlichen Indifferenzkurve (einer Scitovsky-Linie zu aggregieren. Ihre Abschnitte auf den Güterachsen liegen mit $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ fest. Den Verlauf zwischen den Achsen kann man sich leicht klarmachen: Entsprechend der Definition einer Scitovsky-Linie ist ausgehend von ihrem Schnittpunkt mit beispielsweise der x_1-Achse zunächst eine Substitution von x_1 durch beispielsweise x_2 bei der Gruppe von Haushalten durchzuführen, die die kleinste durchschnittliche Rate der Substitution von x_1 durch x_2 aufweist, denn das bedeutet ja, daß diese Gruppe bereit ist, die größten Mengen an x_1 aufzugeben, um x_2 dafür zu erhalten. Hat diese Gruppe ihre gesamten Mengen an Gut 1 in Gut 2 substituiert, muß als nächste Gruppe die mit der nächst größeren durchschnittlichen Rate der Substitution ihre Mengen an Gut 1 durch Gut 2 substituieren. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis der Schnittpunkt mit der x_2-Achse erreicht ist. Es ergibt sich also eine aus linearen Stücken [2] zusammengesetzte Scitovsky-Linie, deren Stücke mit zunehmender Substitution eine größere durchschnittliche Rate der

---

1) Indifferenzkurven mit proportionalen Achsenabschnitten gehören der gleichen Gruppe an.

2) Die Länge der linearen Stücke hängt ab von der Zahl der Haushalte in der betreffenden Gruppe.

Substitution aufweisen.[1]

Es gilt also auf dieser Scitovsky-Linie

$$\frac{\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\Delta x_2} \geq 0$$

d.h. wir haben eine zunehmende Durchschnittsrate der Substitution von x_1 durch x_2. Gleichung (26) drückt aus, daß die Scitovsky-Linie die Konvexitätsbedingungen erfüllt.

Ganz analog kann vorgegangen werden, wenn aus nicht-konvexen Produktionsfunktionen die gesamtwirtschaftliche Transformationskurve abgeleitet werden soll. Es zeigt sich, daß auch hier die modifizierte Transformationskurve[2] gemäß der Beziehung

$$\frac{\Delta\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\Delta x_2} \leq 0$$

die Konvexitätsbedingungen erfüllt.

Ein Pareto-Optimum ist dann durch den Berührungspunkt zwischen der modifizierten Transformationskurve und der Scitovsky-Linie angegeben. Durch diesen Punkt kann eine Hyperebene gelegt werden, die sowohl für die Menge aller realisierten Produktionspunkte als auch für die Menge aller Verbrauchspunkte, die mindestens das Präferenzniveau der Scitovsky-Linie garantieren, eine Stützebene[3] ist. Die Stützebene bestimmt durch ihre Steigungen die gesell-

---

1) Dieses ist das Verfahren, das auch von M.J. Farell und J. Rothenberg beschrieben wird und Ausgangspunkt einer längeren Diskussion wurde. (vgl. M.J. Farrell, The Convexity Assumption in the Theory of Competitive Markets, in: Journal of Political Economy, Vol. 67. (1959), S. 377 ff, J. Rothenberg, Non-Convexity, Aggregation,and Pareto Optimality, in: Journal of Political Economy, Vol. 68 (1960), S. 435 ff., F.M.Bator, On Convexity, Efficiency, and Markets, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961), S 480 ff, Tj. C. Koopmans, Convexity Assumptions, Allocative Efficiency, and Competitive Equilibrium, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961), S. 478 ff., J. Rothenberg, Comments on Non-Convexity, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961), S. 490 ff.)

2) Eine modifizierte Transformationskurve ist analog der modifizierten Scitovsky-Indifferenzkurve definiert.

3) Eine (e-1)-dimensionale Hyperebene im e-dimensionalen Raum, auf deren einer Seite eine Punktmenge vollständig liegt und die mindestens einen Punkt mit der Hyperebene gemeinsam hat, heißt Stützebene der Punktmenge.(vgl. K. Lancaster, a.a.O., S. 264)

schaftlichen bzw. gesamtwirtschaftlichen Grenzraten der Substitution.[1] Wir können damit die Bedingungen für Pareto-Optimalität im Fall allseitiger Nicht-Konvexitäten beschreiben. Der Berührungspunkt zwischen Scitovsky-Linie und Transformationskurve gibt über die Stützebene eine Schar von Grenzraten der Substitution zwischen den Gütern an. Diese Grenzraten der Substitution entscheiden über die Aufteilung und Produktion der Güter: Alle Haushalte, deren Durchschnittsrate der Substitution von Gut 1 durch Gut 2 kleiner als die entsprechende Grenzrate der Stützebene ist, erhalten nur Gut 2; alle Haushalte, deren Durchschnittsrate größer ist, erhalten entsprechend nur Gut 1.[2] Alle Haushalte, für die die Durchschnittsrate der Grenzrate entspricht, erhalten, so wie es der Aufteilung des linearen Stückes durch den Berührungspunkt entspricht, zum einen Teil nur Gut 1 und zum anderen Teil nur Gut 2.
Analog kann auch die Aufteilung der Produktion auf die Unternehmungen beschrieben werden.
Vergleichen wir abschließend die Bedingungen für Pareto-Optimalität bei fehlender mit denen bei vorliegender Konvexität, so können wir eine überraschend große Ähnlichkeit feststellen. Bei Vorliegen von allseitigen Konvexitäten können die Optimalbedingungen in Form von Marginalbedingungen ausgedrückt werden, die überall die Gleichheit der Grenzraten der Substitution verlangen. Das bedeutet, daß alle Wirtschaftseinheiten von allen Gütern bestimmte Mengen erhalten. Werden Verallgemeinerungen gemäß dem Kuhn-Tucker Ansatz zugelassen, sind Ungleichheiten der Grenzraten der Substitution zu erwarten. Die aggregierten Kurven, die Scitovsky-Linie und die Transformationskurve, bestimmen jedoch, insoweit alle Güter überhaupt vorkommen, eindeutig eine Stützebene mit entsprechenden Grenzraten der Substitution.
Die letzte Aussage ist bis auf "eindeutig" in gleicher Weise gültig bei allseitigen individuellen Nicht-Konvexitäten, da diese beim Aggregieren konvexe Kur-

---

1) Berühren sich die beiden Kurven in einem linearen Stück einer Kurve, bestimmt dessen Steigung die Steigung der Stützebene. Ist der Berührpunkt für beide Kurven ein Eckpunkt, hat die Stützebene eine Steigung, die zwischen den beiden mittleren der vier möglichen Steigungen in diesem Punkt liegen muß.

2) Kriterium ist also, ob $\frac{x_k^a}{x_h^a} \gtrless \frac{\partial x_k}{\partial x_h}$

ven ergeben.[1] Die durch die Stützebene bestimmten Grenzraten der Substitution sind Orientierungsgrößen für die Güteraufteilung. Jedoch treten an die Stelle der Gleichheit von Grenzraten der Substitution Ungleichheiten von Durchschnittsraten der Substitution. Das bedeutet, daß die Wirtschaftseinheiten jeweils nur ein einziges Gut bekommen, bestimmt werden muß nur ihre jeweilige Anzahl.

In ähnlicher Weise können auch Fälle untersucht werden, bei denen eine beliebige Zahl von Funktionen die Konvexitätsbedingungen und eine beliebige Zahl von Funktionen die Konvexitätsbedingungen nicht erfüllt. Natürlich sind auch Funktionen denkbar, die in einigen Bereichen die Konvexitätsbedingungen erfüllen und in anderen nicht.

---

1) Nicht-konvexe Scitovsky-Linien und/oder gesamtwirtschaftliche Transformationskurven kann es also bei einer entsprechend großen Zahl von Wirtschaftseinheiten bei dieser Art der Aggregation nicht geben.

III Erfüllung der Pareto-Optimalbedingungen durch ein marktwirtschaftliches System im Falle fehlender Externalitäten

A. Vorbemerkungen

In Teil II werden Bedingungen abgeleitet, mit deren Hilfe die gemäß den Pareto-Kriterien ermittelten optimalen Zustände beschrieben werden können. Es wurde festgestellt, daß die - üblicherweise als Pareto-Optimalbedingungen bezeichneten - Marginalbedingungen nur in sehr restriktiven Fällen Pareto-optimale Zustände angeben. Trotzdem sind sie es, die als Maßstab für positive Analysen eine sehr wesentliche Rolle spielen.[1] Diese Aufgabe ist nun diesem Teil III vorbehalten. Hier sind also Wirtschaftssysteme daraufhin zu überprüfen, ob sie in der Lage sind, Pareto-optimale Zustände zu realisieren. Wegen der Vielzahl der Realtypen von Wirtschaftssystemen muß sich die Analyse auf Idealtypen beziehen. Diese Idealtypen sind zum einen das Modell eines vollkommenen marktwirtschaftlichen Systems und zum anderen das eines reinen planwirtschaftlichen Systems. Letzteres unterscheidet sich - zumindest in der Formulierung, wie sie O. Lange[2] gewählt hat - im Prinzip nicht von den marktwirtschaftlichen Modellen des Konkurrenz- bzw. Preismechanismus[3]. Es genügt daher, wenn hier marktwirtschaftliche Systeme analysiert werden. Im Mittelpunkt soll dabei das Modell der vollständigen Konkurrenz stehen.

---

1) Die weitgehende Identifizierung von Pareto-Optimalbedingungen mit den Marginalbedingungen bzw. die daraus resultierende Gleichsetzung von Pareto-Optimum mit der Erfüllung der Marginalbedingung ist, wie wir oben gesehen haben, nicht korrekt. Sie liegt wohl in der Einfachheit und Anschaulichkeit der Marginalbedingungen begründet, die dem Denken des Ökonomen, "etwas Marginales etwas Marginalem gleichzusetzen", entspricht.

2) O. Lange, On the Economic Theory of Socialism, in: On the Economic Theory of Socialism, O. Lange - F.M. Taylor (eds), New York - Toronto-London 1966

3) vgl. P. Cr. Roberts, Oscar Lange's Theory of Socialist Planning, in: Journal of Political Economy, Vol. 79 (1971), S. 562 ff.

Es wird jedoch auch auf ein anderes marktwirtschaftliches System, das Modell allseitiger Verhandlungen,[1] einzugehen sein. Es wird sich zeigen, daß das letztere System immer in der Lage ist, Pareto-optimale Zustände zu realisieren.

B. Das Gleichgewicht im Modell der vollständigen Konkurrenz

Einer der entscheidenden Begriffe für das Modell der vollständigen Konkurrenz ist der des Preises[2], kann dieses Modell doch durch den Markt- oder Preismechanismus charakterisiert werden. Unter dem Preis p_k des Gutes k sei hier die Zahl der Einheiten eines Tauschmediums verstanden, die gegen eine Einheit des Gutes k getauscht werden. Das Tauschmedium wird als Geld bezeichnet. Handelt es sich bei Geld um eines der e Güter, so hat dieses Gut natürlich den Preis 1. Dieses Gut, das dann auch als Recheneinheit dient, wird als numeraire-Gut bezeichnet.
Handelt es sich bei Geld nicht um eines der e Güter, sondern um eine abstrakte Recheneinheit, dann hat jedes der e Güter einen absoluten Preis, der für keines der Güter gleich 1 sein muß. Von beiden Konzepten könnte im folgenden in gleicher Weise ausgegangen werden. Aus Symmetriegründen entscheiden wir uns jedoch für die absoluten Preise.[3] e Preise p_k bilden dann einen Preisvektor $p = (p_1, \ldots, p_e)$.

Mit dem Begriff des Preises können die Annahmen des Modells der vollständigen Konkurrenz erläutert werden. Dieses ist ein Modell eines marktwirtschaftlichen

---

1) Das Modell allseitiger Verhandlungen wird häufig auch als System der Optionsfixierung bezeichnet.
2) Es sollte beachtet werden, daß die Ableitung der Pareto-Optimalbedingungen ohne Verwendung des Begriffs Preis erfolgen mußte, denn das Konzept der Pareto-Optimalität ist als normatives Konzept unabhängig von Begriffen bestimmter Wirtschaftsordnungen. Jedoch findet man in der Literatur häufig eine Verquickung beider Aspekte, wenn z.B. davon die Rede ist, daß im Pareto-Optimum das Grenzwertprodukt eines Faktors nicht kleiner bzw. der bewertete Grenznutzen eines Gutes nicht größer als sein Preis sein darf. (So z.B. U. Schlieper, Pareto-Optima, externe Effekte und die Theorie des Zweitbesten, Köln u.a. 1969, S. 28). Vor einer solchen Identifizierung von Pareto-Optimalität und Konkurrenzgleichgewicht muß eindringlich gewarnt werden.
3) Neben dem erwähnten Symmetrieargument spricht für die absoluten Preise auch das Problem der Normierung. In Existenzbeweisen eines Konkurrenzgleichgewichtes wird häufig die Konvexität der Menge aller Preisvektoren verlangt. Dies kann bei absoluten Preisen durch die Normierung gewährleistet werden. Beim numeraire-Konzept ist diese Normierung nicht möglich.

Systems, das durch die folgenden Annahmen gekennzeichnet werden kann[1]:

1. Für jedes der e Güter gibt es einen Markt, auf dem dieses Gut gegen das Geld getauscht werden kann. Alle Güter sind homogen, d.h. eine Einheit ist ein vollständiges Substitut zu jeder anderen Einheit. Infolgedessen kann es für jedes Gut nur einen Preis geben.
2. Die Zahl der tauschenden Wirtschaftseinheiten ist so groß, daß keine damit rechnet, den Preis auf einem Markt beeinflussen zu können. Alle Wirtschaftseinheiten betrachten den Preis daher als gegeben und passen sich mit ihren Aktionsparametern, den Mengen, an ihn an (Mengenanpasserverhalten). Es gibt daher auch keine Koalitionen zwischen den Wirtschaftseinheiten.
3. Alle Wirtschaftseinheiten haben volle Information über die herrschenden Preise.
4. Die Zielsetzung der Haushalte besteht in der Maximierung ihres Präferenzniveaus; die Zielsetzung der Unternehmungen besteht in der Maximierung ihres Gewinns.
5. Auf jedem Markt besteht freier Zugang für Haushalte und Unternehmungen.
6. Alle Preise sind flexibel.

Bevor aus diesen Annahmen die optimalen Entscheidungen der Marktteilnehmer abgeleitet werden, müssen noch die folgenden Definitionen erwähnt werden:
Ein Preis ist ein Gleichgewichtspreis, wenn er zu Markträumung auf dem entsprechenden Markt führt. Markträumung bedeutet dabei, daß alle Tauschwünsche befriedigt werden. Die Tauschwünsche, bei denen Gut k gegen Geld abgegeben werden soll, stellen das Angebot auf dem Markt k dar. Entsprechend wird die Nachfrage auf dem Markt k durch die Tauschwünsche, durch die Geld gegen Gut k abgegeben werden soll, gebildet.

---

1) Für die Zusammenstellung der Annahmen werden verschiedene Quellen benutzt: J.M. Henderson - R.E. Quandt, a.a.O., S. 86 , M.A.G. van Meerhaeghe, Economics - A Critical Approach, London 1971, S. 218 f., C. Abraham - A. Thomas, Micro-Economics, Dordrecht 1973, S. 80 ff, D. Collard, Prices, Markets and Welfare, London 1972, S. 3

1. Das Gleichgewicht einer einzelnen Unternehmung

Für jede beliebige der m Unternehmungen ist der Gewinn definiert als[1)]

$$G = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \tag{26}$$

Gemäß Annahme 4 ist die Unternehmung bestrebt, ihren Gewinn zu maximieren. Sie kann das nur über ihre Aktionsparameter, entsprechend Annahme 2 ihre Mengen. Ein Zustand, in dem weitere Mengenveränderung keine Gewinnerhöhung bringt, wird als individuelles Gleichgewicht der Unternehmung bezeichnet. Bei der Wahl ihrer Mengen hat die Unternehmung als Restriktion ihre Produktionsbedingung zu beachten. Formal ist also wieder ein Lagrange-Ansatz zu lösen, nämlich die Maximierung der Lagrange-Funktion

$$G^* = \sum_k p_k x_k - \varrho\, T(x_1, \cdots, x_n) \qquad \text{mit } \varrho > 0 \tag{27}$$

ϱ ist wieder ein noch unbestimmter Lagrange-Multiplikator. Notwendige Bedingung für ein lokales inneres Maximum ist, daß die partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach allen autonomen Variablen, also den Aktionsparametern, verschwinden. Es muß dann gelten

$$\frac{\partial G^*}{\partial x_k} = p_k - \varrho \frac{\partial T}{\partial x_k} = 0$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial x_h} = p_h - \varrho \frac{\partial T}{\partial x_h} = 0 \tag{28}$$

bzw.

$$-\frac{p_k}{p_h} = \frac{\partial x_h}{\partial x_k} \tag{28'}$$

[2)]

---

1) Der Einfachheit halber wird in diesem Abschnitt der Index j weggelassen.

2) Werden die Verallgemeinerungen des Kuhn-Tucker Ansatzes zugelassen, kann auch die Ungleichheit gelten. Ist z. B.

$-\frac{p_k}{p_h} < \frac{\partial x_h}{\partial x_k}$, wird von der Unternehmung kein x_k zur Verfügung gestellt bzw. eingesetzt.

Da diese Bedingungen für alle m Unternehmungen gelten, lauten die Bedingungen erster Ordnung für ein lokales inneres Maximum

$$(28'') \qquad -\frac{p_k}{p_h} = \frac{\partial_r x_h}{\partial_r x_k} = \frac{\partial_q x_h}{\partial_q x_k} \qquad \text{für} \quad \begin{matrix} r, q = 1, \dots, m \\ h, k = 1, \dots, e \end{matrix}$$

Die Bedingungen zweiter Ordnung verlangen, daß die Determinante der Matrix aus den zweiten partiellen Ableitungen[1]

$$(29) \qquad G^{*''} = \begin{vmatrix} -\varrho\, T_{11} & \cdots & -\varrho\, T_{1e} & -T_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -\varrho\, T_{1e} & \cdots & -\varrho\, T_{ee} & -T_e \\ -T_1 & \cdots & -T_e & 0 \end{vmatrix}$$

bestimmte Vorzeichenbedingungen erfüllt. (29) kann umgeformt werden zu

$$(29') \qquad G^{*''} = -T_1^{\,2}\left(-\varrho\, T_1\right)^{e-1} \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^{\,2}} & \cdots & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & \cdots & -\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^{\,2}} \end{vmatrix}$$

Für e (un) gerade muß $G^{*''} > 0$ (< 0) sein. Das verlangt aber, wie oben abgeleitet wurde, zunehmende direkte Grenzraten der Substitution und indirekte Grenzraten der Substitution, die dem Betrage nach kleiner sind.

Gleichung (28') ist für die Unternehmung die entscheidende Verhaltensgleichung. In der Form

$$(30) \qquad p_k = -p_h \frac{\partial x_h}{\partial x_k}$$

charakterisiert sie alle Gütermengenkombinationen, die bei verschiedenen Höhen von p_k im Gleichgewicht realisiert werden müssen. Aus ihr kann dann beispielsweise die funktionale Beziehung zwischen x_k und p_k, die Angebotsfunktion im Falle eines Gutes oder die Nachfragefunktion im Falle eines Faktors, abgeleitet werden. Wie Gleichung (30) in Verbindung mit den Konvexitätsbedingungen gemäß Gleichung (29') zeigt, ergibt sich unter diesen

---

1) Wie oben gilt wieder $T_{kh} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_k \partial x_h}$

Annahmen eine strikt steigende Angebotsfunktion.

Dieser Zusammenhang gilt entsprechend auch im e-Güter-Fall. Es zeigt sich auch dann, daß strikte Konvexität der Produktionsfunktion eine strikt steigende Angebotskurve[1)] bedingt.

---

1) Die Angebotskurve wird durch die Grenzkostenkurve angegeben. Dies läßt sich leicht zeigen. Sei

$x_1 = x_1 (x_2, \ldots, x_e)$

eine Produktionsfunktion mit x_1 als Output und x_k ($k \neq 1$) als Input. Dann sind (wegen der Definition von Inputs) die Kosten

$$K(x) = -\sum_{k=2}^{e} p_k x_k \qquad \text{mit} \qquad dK(x) = -\sum_{k=2}^{e} p_k \, dx_k$$

Im Gleichgewicht ist

$$dG = p_1 \left(\sum_k \frac{\partial x_1}{\partial x_k} dx_k \right) + \sum_k p_k \, dx_k = 0$$

bzw.

$$\frac{dG}{dx} = p_1 + \frac{\sum p_k \, dx_k}{\sum \frac{\partial x_1}{\partial x_k} dx_k} = p_1 - \frac{dK}{dx} = 0$$

Die Angebotskurve ist durch die Bedingung Preis= Grenzkosten gekennzeichnet. Sie wird also durch die Grenzkostenkurve angegeben.
Die Bedingungen zweiter Ordnung verlangen, daß

$$d^2G = \sum_k \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^2} dx_k^2 + 2 \sum_{k \neq h} \sum_h \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k \partial x_h} dx_k \, dx_h < 0$$

Damit sind aber genau die oben abgeleiteten Konvexitätsbedingungen zu erfüllen. Strikte Konvexität bedingt demnach eine steigende Grenzkostenkurve.

Wir haben damit abgeleitet, wie die Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum aussehen müssen, wenn die Unternehmung alle Güter zur Verfügung stellt bzw. einsetzt: Diese Marginalbedingungen implizieren steigende Grenzkosten- bzw. Angebotskurven. Weiter stellten wir fest, daß die Bedingungen zweiter Ordnung für das individuelle Gleichgewicht erfüllt sind, wenn für die Produktionsbedingung bzw. die Produktionsfunktion die Konvexitätsbedingungen gegeben sind.

Nicht-Konvexitäten können eine erhebliche Plausibilität und Relevanz beanspruchen.[1] Es ist daher erforderlich, auch (in diesem Falle) Bedingungen für ein Gleichgewicht der Unternehmung abzuleiten. Das Gleichgewicht einer Unternehmung wird durch den Produktionspunkt angegeben, in dem der positive Abstand der Isogewinnebenen vom Ursprung maximiert wird.[2] Dies ist bei überall konvexen Produktionsfunktionen im Tangentialpunkt von Produktionsfunktion und Isogewinnebene der Fall. Dort gelten die Marginalbedingungen.

Bei einer überall nicht-konvexen Produktionsfunktion würde ein Tangentialpunkt den größten negativen Abstand, also den maximalen Verlust, angeben. Die Bedingungen für ein Gewinnmaximum ergeben sich dann vielmehr folgendermaßen: Da der Gewinn durch das Skalarprodukt $\sum_k p_k x_k$ eines Produktionsvektors $(x_1, \ldots, x_e)$ mit dem Preisvektor $(p_1, \ldots, p_e)$ bestimmt wird, hängt er bei gegebenen Preisen vom Zwischenwinkel der beiden Vektoren und deren Länge ab, wobei ein kleinerer Zwischenwinkel und / oder eine

1) Die empirische Relevanz von Nicht-Konvexitäten ist offenkundig. Nicht-Konvexitäten können auftreten in Form von
   1. Unteilbarkeiten (Indivisibilities). (vgl. M.J. Farrell, a.a.O., S. 389, J. de V. Graaff, a.a.O., S. 107 ff.)
   2. Zunehmende Skalenerträge (increasing returns to scale). Kaldor betont besonders ihre Bedeutung in der industriellen Produktion. (vgl. N. Kaldor , The Irrelevancy of Equilibrium Economics, in: Economic Journal, Vol. 82 (1972), S. 1273 ff.). Ähnlich hatte bereits A. Smith bei seinem Nadelbeispiel argumentiert.
   3. Vorteile der Spezialisierung (economies of specialization). Diese von Rothenberg (vgl. J. Rothenberg, Non-Convexity ..., a.a.O., S. 454) betonten Nicht-Konvexitäten stehen in engem Zusammenhang mit den zunehmenden Skalenerträgen. Bei jenen bezieht sich die Nicht-Konvexität auf proportionale Variationen, hier jedoch auf eine Transformationskurve bei fixen Faktormengen (fixed amount of entrepreneurship).
   4. Ertragsgesetzliche Verläufe. Seit der Zeit J.H. v. Thünen's werden ertragsgesetzliche Verläufe der Produktionsfunktionen bei der landwirtschaftlichen Produktion unterstellt. Sie beruhen letztlich auf der Unvermehrbarkeit des Produktionsfaktors Boden.

2) Isogewinnebenen sind dadurch charakterisiert, daß der - Forts. S. 59

größere Länge des Produktionsvektors einen größeren Gewinn bedeuten. Ist z.B. der Zwischenwinkel gleich 90^{o}, d.h. liegt der Produktionsvektor in der vom Preisvektor als Normalenvektor aufgespannten Ebene durch den Ursprung, beträgt der Gewinn Null. Ein vergrößerter Produktionsumfang läßt dann sowohl die Länge des Produktionsvektors größer als auch den Zwischenwinkel kleiner werden. Es entsteht dann Gewinn, der bei einer beliebig großen Produktionsausweitung beliebig hoch werden kann.[1] Es läßt sich leicht zeigen, daß gewinnmaximale Produktion hier bedeutet, daß jeder Faktor nur für die Produktion jeweils eines Gutes eingesetzt wird[2]: Besitzt die Unternehmung von ihren Faktoren x_h bestimmte Höchstmengen, wird jeder Faktor dort eingesetzt, wo die Ungleichung

$$(31) \qquad -\frac{p_k}{p_h} < \frac{x_k}{x_k}$$

am stärksten erfüllt ist.[3][4] Die Unternehmung setzt also jeden Faktor x_h gewinnmaximal bei dem Gut x_k ein, für das die durchschnittliche Substitutionsrate am stärksten von dem reziproken Preisverhältnis abweicht. Natürlich kann es sich dabei für alle h um das gleiche k handeln. Besitzt die Unternehmung nicht bestimmte Höchstmengen der Faktoren, sondern verfügt sie über eine fixe Ausgabensumme für die Faktoren, wird das Gewinnmaximum wieder über Ungleichung (31) ermittelt. Es ist offensichtlich, daß nun nur ein einziger Faktor zur Produktion eines einzigen Gutes eingesetzt wird.[5]

Preisvektor $p = (p_1, \ldots, p_e)$ der Normalenvektor dieser Ebenen ist.

Der positive Abstand ist der Abstand im positiven Orthanten.

1) Im Gegensatz hierzu sorgte Konvexität für einen eindeutig bestimmten Produktionsumfang im Gleichgewicht.
2) Dies liegt daran, daß auch die Transformationskurven nicht-konvex sind.
3) Diese Ungleichung folgt direkt aus der Gewinndefinition (26).
4) Dieses ist eine der Optimalbedingung (S. 50) vergleichbare Bedingung; nur tritt hier an die Stelle der Grenzraten der Substitution der Scitovsky-Linie bzw. der gesamtwirtschaftlichen Transformationskurve das Preisverhältnis.
5) Zu ähnlichen Ergebnissen gelangen Baumol-Bradford bei der Untersuchung potentieller Pareto-optimaler Punkte im Falle von indididuellen Nicht-Konvexitäten, die durch Externalitäten verursacht sind. (vgl. W.J. Baumol - D.F. Bradford, Detrimental Externalities and Non-Convexity of the Production Set, in: Economica, Vol. 39, No. 154 (1972), S. 169 ff.)

Diese letzten Überlegungen zeigen aber auch, daß die unter diesen Annahmen abgeleiteten Angebots- und Nachfragekurven eine besondere Gestalt haben. Für Preise p_k mit

$$(31') \qquad -\frac{p_k}{p_h} \geqslant \frac{x_h}{x_k}$$

ist es nicht sinnvoll, diesen Produktionspunkt zu realisieren, da kein Gewinn entsteht. Für solche Preise wird die Menge $x_k = 0$ angeboten. Für Preise p_k, die (31) erfüllen, wird dann jedoch sofort die maximal mögliche Menge x_k bereitgestellt.[1] Die Angebotskurve ist also unstetig.

Es stellt sich allerdings die Frage, ob Nicht-Konvexitäten in dieser Form überhaupt vereinbar sind mit den Annahmen der vollständigen Konkurrenz. Sie implizieren nämlich einen unendlich großen Produktionsumfang, da die Unternehmung annahmegemäß damit rechnet, bei gegebenen Preisen beliebig viele Faktoren beschäftigen zu können, also von einem unendlich elastischen Faktorangebot ausgeht. Diese Annahme führt aber zwangsläufig zu einer Monopolbildung auf dem Gütermarkt, wodurch die Verhaltensweise der Mengenanpassung nicht mehr aufrecht erhalten werden kann. Es ist dann nicht mehr möglich, daß sich die Unternehmung ihrer Preisbeeinflussung nicht bewußt ist. Damit aber ist eine wesentliche Annahme des Modells der vollständigen Konkurrenz nicht mehr gültig.[2]

Auf der anderen Seite widerspricht aber die oben getroffene Annahme fixer Faktorhöchstmengen der Forderung der vollständigen Elastizität des Faktorangebotes. Das bedeutet, daß Nicht-Konvexitäten der beschriebenen Art mit den Annahmen des Modells der vollständigen Konkurrenz nicht vereinbar sind. Aus diesem Dilemma führt nur die empirisch relevante und plausible Annahme eines ertragsgesetzlichen Verlaufs der Produktionsfunktionen heraus. Es wird damit Nicht-Konvexität nur in einem bestimmten Bereich der Produktionsfunktion unterstellt. Die gewinnmaximalen Produktionspunkte ergeben sich nach dem eben Abgeleiteten ohne Schwierigkeit: In dem Bereich, in dem die Additivitätsannahme[3] gilt,[4] gibt es keinen gewinnmaximalen Produktionspunkt, der

---

1) Genau die gleiche Überlegung gilt auch für Variationen von Preis p_h. Es ergibt sich dabei eine Nachfragekurve nach Faktor x_h.
2) Zu dieser Möglichkeit siehe die späteren Ausführungen.
3) Die Additivitätsannahme in unserer speziellen Definition
4) Dieser Bereich charakterisiert ja die Mindestgröße der Unternehmung.

positiven Gewinn erbringt. Zu den Produktionspunkten im Bereich der Mindestgröße jedoch, bei denen ein Gewinn entsteht, gibt es im konvexen Bereich der Produktionsfunktion notwendig einen effizienten Produktionspunkt, der als Tangentialpunkt gemäß (28') ein Gewinnmaximum angibt. Das bedeutet aber, daß für diese Produktionsfunktionen neben dem Ursprung nur Produktionspunkte von der Mindestgröße an als Gewinnmaxima in Betracht kommen.[1)]

Für die Angebots- bzw. Nachfragekurven folgt daraus, daß sie wieder einen "Sprung" im Bereich der Mindestgröße aufweisen, dann aber stetig steigend bzw. sinkend verlaufen.

Damit sind die jeweils gewinnmaximalen Produktionspunkte für eine Unternehmung gefunden. Bei vollständiger Konvexität bestimmt sie ihre Produktionsentscheidung nach der "Preis gleich Grenzkosten"-Bedingung.[2)] Entsprechend kann man bei vollständiger Nicht-Konvexität von der "Preis ungleich Durchschnittskosten"-Bedingung sprechen, die der Produktionsentscheidung zugrunde liegt. Ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen verlangen eine Kombination beider Bedingungen.

Im folgenden ist zu prüfen, ob individuelle Gewinnmaxime auch ein Gewinnmaximum für den gesamten Produktionsbereich implizieren.

2. Das Gleichgewicht im Produktionssektor

Um das Gleichgewicht im gesamten Produktionssektor zu bestimmen, sind die aufsummierten Gewinne aller Unternehmungen und Beachtung aller Produktionsbedingungen zu maximieren.[3)] Dazu wird folgende Lagrange-Funktion gebildet

$$(32) \qquad \hat{G} = \sum_{j} \sum_{k} p_k \, {}_j x_k - \sum_{j} \varrho_j \, {}_j T ({}_j x_1, \dots, {}_j x_e)$$

Die Bedingungen erster Ordnung verlangen $\alpha \hat{G} = 0$, also

$$(33a) \qquad \frac{\partial \hat{G}}{\partial \, {}_j x_k} = p_k - \varrho_j \frac{\partial \, {}_j T}{\partial \, {}_j x_k} = 0 \qquad \text{für } j = 1, \dots, m \quad k = 1, \dots, e$$

---

1) In ähnlicher Weise können auch mehrfach wechselnde konvexe und nichtkonvexe Bereiche in einer Produktionsfunktion analysiert werden.

2) Lerner spricht in diesem Zusammenhang einfach von der "Regel" (vgl. A. P. Lerner, The Economics of Control, New York 1947, S. 64 ff.)

3) s. S. 62

(33b) $$\frac{\partial \hat{G}}{\partial {}_r x_h} = p_h - g_r \frac{\partial {}_r T}{\partial {}_r x_h} = 0 \qquad \text{für } r = 1, \dots, m \quad h = 1, \dots, e$$

(33c) $$\frac{\partial \hat{G}}{\partial g_j} = {}_j T\left({}_j x_1, \dots, {}_j x_e\right) = 0$$

Daraus ergeben sich genau die Marginalbedingungen (28'').
Die Bedingungen zweiter Ordnung beziehen sich auf die Determinante der folgenden Matrix

(34) $$\hat{G}'' = \begin{bmatrix} -g_1 {}_1\bar{T}_{11} & \cdots & -g_1 {}_1T_{1e} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -{}_1T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -g_1 {}_1T_{1e} & \cdots & -g_1 {}_1T_{ee} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -{}_1T_e & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -g_m {}_m\bar{T}_{11} & \cdots & -g_m {}_mT_{1e} & 0 & \cdots & 0 & -{}_mT_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -g_m {}_mT_{1e} & \cdots & -g_m {}_mT_{ee} & 0 & \cdots & 0 & -{}_mT_e \\ -{}_1T_1 & \cdots & -{}_1T_e & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & -{}_mT_1 & \cdots & -{}_mT_e & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

bzw. nach Umformung

Wir beschränken uns hier auf die Bedingungen für innere lokale Gewinnmaxima.

$$(34') \qquad \prod_{\nu} \left(-{}_{\nu}T_1^2\right)\left(-\varrho_{\nu_1}{}_{\nu}T_1\right)^{e-1} \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2{}_1x_1}{(\partial{}_1x_2)^2} \cdots -\frac{\partial^2{}_1x_1}{\partial{}_1x_2\,\partial{}_1x_e} \cdots 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ -\frac{\partial^2{}_1x_1}{\partial{}_1x_2\,\partial{}_1x_e} \cdots -\frac{\partial^2{}_1x_1}{(\partial{}_1x_e)^2} \cdots 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & \cdots -\frac{\partial^2{}_mx_1}{(\partial{}_mx_2)^2} \cdots -\frac{\partial^2{}_mx_1}{\partial{}_mx_2\,\partial{}_mx_e} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & \cdots -\frac{\partial^2{}_mx_1}{\partial{}_mx_2\,\partial{}_mx_e} \cdots -\frac{\partial^2{}_mx_1}{(\partial{}_mx_e)^2} \end{bmatrix}$$

Die Vorzeichenbedingungen sind hier genau dann erfüllt, wenn für jede Produktionsbedingung die Konvexitätsbedingungen erfüllt sind.

Wir gelangen damit zu dem Ergebnis, daß die Bedingungen für den maximalen Gewinn im gesamten Produktionsbereich die gleichen sind wie die für ein individuelles Gleichgewicht der Unternehmungen. Das bedeutet, daß die Unternehmungen durch ihre "egoistische" Zielsetzung der individuellen Gewinnmaximierung gleichzeitig dafür sorgen, daß der Gesamtgewinn in der Volkswirtschaft maximiert wird.

Dieses Ergebnis ist bedeutungsvoll für die Untersuchung der Pareto-Optimalität des Konkurrenzgleichgewichts.

Auch bei Nicht-Konvexität gelten im Gleichgewicht des gesamten Produktionssektors die für individuelle Gewinnmaximierung abgeleiteten Bedingungen. Nur taucht hier die Möglichkeit einer erfolgreichen Kooperation auf. Wegen der Gültigkeit der Additivitätsannahme kann durch Faktorumlegung zwischen den Unternehmungen, aber auch durch Fusion der Unternehmungen der Gesamtgewinn in der Volkswirtschaft erhöht werden. [1] Die Folge davon ist eine Monopolisierung der Gütermärkte und daher eine Sprengung der Annahmen des Modells der vollständigen Konkurrenz.

Zu beachten ist, daß bei Nicht-Konvexitäten, sei es in Form von durchgehenden Nicht-Konvexitäten oder ertragsgesetzlichen Produktionsfunktionen, nicht nur die individuellen Angebots- und Nachfragekurven einen Sprung aufweisen, sondern auch die durch horizontale Aggregation erhältlichen Marktangebots- und Marktnachfragekurven. Die Zahl der Sprünge entspricht bei ihnen der Zahl der Unternehmungen in der Volkswirtschaft.

---

1) Eine ähnliche Argumentation findet sich auch bei Samuelson. Hier wie dort wird dabei angenommen, daß die Kooperation kostenlos möglich ist. (vgl. P. A. Samuelson, The Monopolistic Competition Revolution, in: Monopolistic Competition Theory, R. Kuenne (ed.), New York-London-Sidney, S. 105 ff.)

Es verwundert daher nicht, wenn versucht wurde, die geschilderte Problematik zu umgehen. Dies geschieht durch die Behauptung, daß im Grunde alle Produktionsfunktionen die Annahmen der Additivität und der Konvexität erfüllen müßten, wenn man in der Lage wäre, alle auch nur irgendwie für die Produktion relevanten Faktoren und sonstige Umstände zu berücksichtigen. So elegant eine solche Lösung wäre, scheint es aber doch nicht zulässig, a priori bestimmte technologische Strukturen auszuschließen. [1)]

3. Das Gleichgewicht eines Haushalts

Ein Gleichgewicht für einen individuellen Haushalt liegt dann vor, wenn der Haushalt seinen Präferenzindex maximiert hat unter Beachtung der Budgetgeraden als Restriktion. Die Lage der Budgetgeraden, die die Höhe des Einkommens angibt, hängt dabei ab von der Annahme, die über das Eigentum an den Produktionsmitteln gemacht wird. Es soll hier von der Annahme des Privateigentums an den Produktionsmitteln ausgegangen werden. [2)] Dann bezieht der Haushalt sein Einkommen aus zwei Quellen. Der eine Teil wird erzielt durch die Bereitstellung von Faktoren. Er hat folgende Höhe

$$(35') \qquad E_1 = - \sum_{k^*} p_{k^*} x^i_{k^*}$$

wobei $k^* \in 1, \cdots, e$ derart ist, daß $x^i_{k^*} < 0$

Der andere Teil ist sein Besitzeinkommen. Er resultiert aus Beteiligungen an den Unternehmungen und wird in Form von Gewinnanteilen an die Haushalte ausgeschüttet. Seine Höhe ist

$$(35'') \qquad E_2 = \sum_{j=1}^{m} {}_j\theta^i \sum_k p_k \, {}_j x_k$$

Dabei bedeutet ${}_j\theta^i$ den Anteil, den Haushalt i vom Gewinn der Unternehmung j erhält. Die ${}_j\theta^i$ können dem Beteiligungsanteil an der Unternehmung entsprechen;

---

1) Demnach müßte beispielsweise auch die Gravitationskonstante Berücksichtigung finden. (vgl. C.J. Oort, Decreasing Costs as a Problem of Welfare Economics, Amsterdam 1958, S. 116,) Samuelson wendet sich gegen diese Harmonievorstellung mit dem Beispiel, daß das Volumen keine lineare Funktion des Radius sei. (vgl. P.A. Samuelson, Foundations, a.a.O., S. 84)

2) Diese Annahme wählt auch Debreu. (G. Debreu, Theory ... a.a.O., S. 78)

sie brauchen aber nicht konstant zu sein. Es muß für sie gelten

$$\theta^{ij} \geq 0 \quad \text{für alle } i, j \qquad \text{und} \quad \sum_{i} \theta^{ij} = 1 \quad \text{für alle j.}$$

Das Gesamteinkommen des Haushalts beträgt also

$$(35) \qquad E = E_1 + E_2 = -\sum_{k^*} p_{k^*} x_{k^*}^{i} + \sum_{j} \theta^{ij} \sum_{k} p_{kj} x_k$$

Sein Gesamteinkommen verwendet der Haushalt zum Kauf von Gütern.
Die Ausgaben dafür betragen

$$(36) \qquad A = \sum_{k^{**}} p_{k^{**}} \cdot x_{k^{**}}^{i}$$

wobei $k^{**} \in 1, \cdots, e$ so bestimmt ist, daß $x_{k^{**}}^{i} > 0$
Wird das Einkommen voll verausgabt[1], ist $A = E$, d.h.

$$(37) \qquad \sum_{k} p_k x_k^{i} - \sum_{j} \theta^{ij} \sum_{k} p_{kj} x_k = 0$$

Dieses ist die Budgetgleichung, die der Haushalt zu beachten hat.
Das Gleichgewicht des Haushalts kann dann mit einem Lagrange-Ansatz ermittelt werden

$$(38) \qquad u^{*} = u^{i}(x_1^{i}, \cdots, x_e^{i}) - \tau \left(\sum_{k} p_k x_k^{i} - \sum_{j} \theta^{ij} \sum_{k} p_{kj} x_k \right)$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein lokales inneres Maximum verlangen
$d U^{*} = 0$, d.h.

$$(39a) \qquad \frac{\partial u^{*}}{\partial x_k^{i}} = \frac{\partial u^{i}}{\partial x_k^{i}} - \tau \cdot p_k = 0$$

---

1) Dies kann sichergestellt werden, wenn wir von einer etwas anderen Annahme der Nicht-Sättigung ausgehen: Nicht-Sättigung für den Haushalt i liegt vor, wenn es mindestens ein k gibt, für das
$u_k^{i} > 0$

(39b) $$\frac{\partial u^*}{\partial x_h^i} = \frac{\partial u^*}{\partial x_h^i} - \hat{\tau} p_h = 0$$

(39c) $$\frac{\partial u^*}{\partial \hat{\tau}} = \sum_k p_k x_k^i - \sum_j \theta^i \sum_k p_{kj} x_k = 0$$

Dieser Ansatz gilt ohne Beschränkung für alle Haushalte, so daß wir für den Konsumsektor folgende Gleichgewichtsbedingungen haben.[1)]

(40) $$-\frac{p_k}{p_h} = \frac{\partial x_h^i}{\partial x_k^i} = \frac{\partial x_h^s}{\partial x_k^s} \quad \text{für alle } i,s = 1, \dots, n \text{ und } k,h = 1, \dots, e$$

Die Bedingungen zweiter Ordnung verlangen, daß die Determinante der Matrix aus den zweiten Ableitungen[2)]

(41) $$u^{*\prime\prime} = \begin{vmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1e} & u_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ u_{1e} & \cdots & u_{ee} & u_e \\ u_1 & \cdots & u_e & 0 \end{vmatrix}$$

bzw.

(41') $$u^{*\prime\prime} = -p_1^2 (-u_1)^{e-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_2 \partial x_e} & \cdots & \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_e^2} \end{vmatrix}$$

die im Exkurs abgeleiteten Vorzeichenbedingungen erfüllt. Sie bedeuten, daß die Indifferenzkurven (strikt) konvex sein müssen.

Gleichung (40) ist die Verhaltensgleichung für den Haushalt. Interessiert die Abhängigkeit zwischen x_k und p_k bzw. x_h und x_h, ergeben sich die Nachfrage- bzw. Angebotskurven des Haushalts. Wie oben gezeigt, verlaufen sie bei Erfüllung der Konvexitätsbedingungen stetig. Liegen irgendwelche Nicht-Konvexitäten vor, haben auch die individuellen Angebots- und Nachfragefunktionen der

---

1) Sie gelten wegen der Annahme der Einheitlichkeit der Preise für alle Wirtschaftseinheiten.

2) Wieder gilt $u_{kh} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_h}$

Haushalte Sprünge. Daraus resultieren für die Marktangebots- und Marktnachfragefunktionen Sprünge entsprechend der Zahl der individuellen Nicht-Konvexitäten.

Für Gleichung (40) müssen die oben beschriebenen Modifikationen zugelassen werden, wenn von den Verallgemeinerungen des Kuhn-Tucker Verfahrens ausgegangen wird. Sie führen zu den schon erwähnten Relativierungen.

Mit den Bedingungen für ein individuelles Gleichgewicht der Haushalte haben wir nun alle Bedingungen angegeben, durch die ein Konkurrenzsystem charakterisiert ist. Ein Zustand dieses Systems, in dem alle Wirtschaftseinheiten im Gleichgewicht sind und die Preise sich so eingespielt haben, daß alle Märkte geräumt sind, heißt Konkurrenzgleichgewicht. Bei unseren Überlegungen blieb aber unerörtert, ob es überhaupt einen Preisvektor gibt, der die Markträumung garantiert und wie dieser Preisvektor gegebenenfalls gefunden werden kann.

C Exkurs: Nicht-Konvexitäten und Existenz eines Gleichgewichts

Üblicherweise wird bei Existenzbeweisen für ein Konkurrenzgleichgewicht von der Annahme vollständiger Konvexität ausgegangen.[1] Es kann nun leicht gezeigt werden, warum diese Annahme gemacht wird.

Grundlage für ein Konkurrenzgleichgewicht ist der Begriff des Marktgleichgewichts. Ein Marktgleichgewicht liegt dann vor, wenn ein bestimmter Marktpreis, der Gleichgewichtspreis, dafür sorgt, daß Angebot und Nachfrage übereinstimmen. Anschaulich ist der Gleichgewichtspreis derjenige Preis, bei dem sich die Angebots- und Nachfragekurven schneiden.

Oben haben wir abgeleitet, wie individuelle Angebots- und Nachfragekurven und - daraus aggregiert - die Marktangebots- und Marktnachfragekurven für den Produktionssektor und für den Konsumsektor verlaufen. Dabei zeigte sich, daß bei Vorliegen von Nicht-Konvexitäten Sprünge in den Kurven entstehen. Bei ertragsgesetzlichen Verläufen der individuellen Produktionsfunktionen erstreckt sich dieser Sprung nicht nur über den nicht-konvexen Bereich, sondern auch über einen bestimmten Teil des konvexen Bereichs der Produktionsfunktion, nämlich bis zur Mindestgröße der jeweiligen Unternehmung. Die daraus aggregierte

---

1) Vgl. K.J. Arrow - G. Debreu, Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, in: Econometrica, Vol. 22 (1954), S. 265 ff., G. Debreu, Theory ... a.a.O., L. Mc Kenzie, On the Existence of General Equilibrium in a Competitive Market, in: Econometrica, Vol. 27 (1959), S. 54 ff. u.a.m.

Marktangebotskurve weist dementsprechend gemäß der Zahl der individuellen Nicht-Konvexitäten eine Vielzahl von Sprüngen auf, die sich mit stetigen Stücken abwechseln. Jedoch nimmt mit steigendem Angebot die Bedeutung der Sprünge gegenüber den stetigen Teilen ab. Unterstellt man einen stetigen Verlauf der Marktnachfragefunktion, bedeutet das, daß die "Wahrscheinlichkeit", daß ein Schnittpunkt zwischen beiden Kurven besteht, mit steigender Zahl der Unternehmungen steigt. Ist speziell die Marktnachfragekurve vollkommen elastisch, existiert immer ein Gleichgewicht.

Für durchgehende Nicht-Konvexitäten bestehen die individuellen Angebots- und/oder Nachfragekurven nur aus zwei Punkten, wenn von fixen Faktorausstattungen ausgegangen wird. Die Marktangebots- und/oder Marktnachfragekurve besteht deshalb aus m+1 bzw. n+1 vollkommen unelastischen Abschnitten. Die "Wahrscheinlichkeit" für die Existenz eines Marktgleichgewichts ist dann erheblich geringer als im Fall der ertragsgesetzlichen Produktionsfunktionen.

Lediglich bei Vorliegen allseitiger Konvexitäten treten weder in den individuellen noch in den Marktangebots- und Marktnachfragefunktionen Sprünge auf. Die Existenz eines Marktgleichgewichts ist dann gewährleistet.[1] Existiert für jeden Markt ein Gleichgewicht und können die Gleichgewichte simultan erreicht werden, liegt ein Konkurrenzgleichgewicht vor.

Bisher blieb die Frage unbeantwortet, wie das Konkurrenzgleichgewicht, selbst wenn es existieren sollte, erreicht werden kann. Von Walras[2] stammt der Vorschlag, sich das Auffinden der Gleichgewichtspreise in der Form eines Herantastens (Tatonnement-Prozeß) vorzustellen[3]. Für das hier beschriebene Kon-

---

1) Es sei dabei unterstellt, daß weder $x = 0$ noch $p=0$ die Gleichgewichtswerte sind.

2) L. Walras, Elements of Pure Economics, engl. Übersetzung, Homewood 1954, insb. S. 164 ff. und S. 470

3) Moderne Versionen des Tatonnement-Prozesses finden sich bei K.J. Arrow - F.H. Hahn, General Competitive Analysis, San Francisco-Edinburgh, 1971, S. 264 ff. Insbesondere werden auch Nontatonnement- und dynamische Tatonnement-Prozesse untersucht. (vgl. R. Kuenne, General ... a.a.O., S. 508, K.J. Arrow - L. Hurwicz, On the Stability of the Competitive Economy, I, in: Econometrica, Vol. 26 (1958), S. 522 ff.)

kurrenzsystem muß der Tatonnement-Prozeß in folgender Weise gedacht werden: Ein Makler (er übernimmt die Funktion der "invisible hand") gibt den Unternehmungen einen beliebig gewählten Preisvektor vor. Die von den Unternehmungen bei diesen Preisen angebotenen und nachgefragten Mengen werden ihm genannt. Er errechnet daraus die jeweiligen Gewinne und gibt dann den Haushalten den gleichen Preisvektor und ihre Gewinnanteile an. Darauf nennen die Haushalte ihre jeweiligen Angebots- und Nachfragemengen. Der Makler prüft, ob sich auf allen Märkten eine Markträumung ergibt. Auf den Märkten, auf denen ein Angebotsüberschuß besteht, senkt er bei der nächsten Befragung den Preis. Bei Nachfrageüberschuß erhöht er den Preis. Dieser Prozeß wird solange durchgeführt, bis auf allen Märkten Gleichgewicht herrscht. Erst dann dürfen die Transaktionen durchgeführt werden.

Mit Hilfe der Konstruktion des Tatonnement-Prozesses sollen die wichtigsten Vorteile des marktwirtschaftlichen Systems verdeutlicht werden, nämlich sein minimaler Informationsbedarf und die Schaffung natürlicher Anreize zur Planrealisierung[1]. Führt der Tatonnement-Prozeß jedoch nicht zu einem Gleichgewicht bzw. sind zu viele Befragungen erforderlich, können diese Vorteile nicht wirksam werden. Dieses kann bei Vorliegen von Nicht-Konvexitäten der Fall sein.

Wir können also feststellen, daß Nicht-Konvexitäten nicht nur für die Existenz eines Konkurrenzgleichgewichts ein Hindernis sein können, sondern auch dazu führen können, daß ein tatsächlich existierendes Gleichgewicht nicht realisiert wird.

D Pareto-Optimalität eines Konkurrenzgleichgewichts

Wir können jetzt die eingangs dieses Teils gestellte Frage beantworten, ob ein Konkurrenzsystem in der Lage ist, im Gleichgewicht einen Pareto-optimalen Zustand zu realisieren. Ein Vergleich der Bedingungen erster Ordnung für Optimalität mit denen für ein Konkurrenzgleichgewicht zeigt, daß sie die gleichen

---

1) vgl. R. Richter, Preistheorie, Wiesbaden 1963, S. 137

sind,[1] nämlich

$$\frac{\partial x_k^i}{\partial x_h^i} = \frac{\partial_j x_k}{\partial_j x_h} = -\frac{p_h}{p_k} \qquad \text{für alle } i, j, k, h$$

Die Bedingungen zweiter Ordnung für Optimalität unterscheiden sich jedoch von denen für ein Konkurrenzgleichgewicht, da für letzteres verlangt wird, daß alle Konvexitätsmaße positiv sind[2], für erstere jedoch nur die Summe von jeweils zwei Konvexitätsmaßen positiv sein muß. Aus dieser Bedingung ist geschlossen worden, daß jedes Konkurrenzgleichgewicht, das durch diese Marginalbedingungen gefunden werden kann, auch ein Pareto-Optimum ist, jedoch umgekehrt nicht jedes Pareto-Optimum durch ein Konkurrenzgleichgewicht realisiert werden kann.[3] Nach dem oben Gesagten müssen wir diese Schlußfolgerung etwas modifizieren. Der Umkehrschluß trifft nämlich nur für Gleichgewichte zu, die mittels dieser Marginalbedingungen ermittelt wurden. Eine Aufgabe der Marginalbedingungen ermöglicht nämlich ein anders bestimmtes Gleichgewicht.

Für den Fall individueller Nicht-Konvexitäten verlangen die Optimalbedingungen

$$(42) \qquad \frac{x_k^i}{x_h^i} < \frac{\partial x_k}{\partial x_h}$$

während die Gleichgewichtsbedingungen fordern, daß

$$(31') \qquad \frac{x_k^i}{x_h^i} < -\frac{p_h}{p_k}$$

damit nur Gut x_h zur Verfügung gestellt wird.

---

1) Dies gilt auch, wenn die Verallgemeinerungen des Kuhn-Tucker Verfahrens zugelassen werden. Dann müssen für Optimalität und Gleichgewicht jeweils Ungleichheitszeichen zugelassen werden.

2) Diese Aussage bezieht sich natürlich nur auf den 2 Güter-Fall. Wir ersparen uns die wiederholte Aufzählung sämtlicher Vorzeichenbedingungen für die Determinanten im allgemeinen Fall.

3) vgl. K. J. Arrow, An Extension of the Basic Theorems of Welfare Economics, in: J. Neyman (ed.), Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley 1951, S. 507 ff., T. C. Koopmans, Three Essays on the State of Economic Science, New York 1957, S. 49 ff.

Bedenkt man aber, daß, wie oben erläutert, die gesamtwirtschaftlichen Grenzraten der Substitution über die Stützebene bestimmte Preisverhältnisse definieren, die den Grenzraten der Substitution gleich sind, dann sieht man, daß die Bedingungen für Optimalität und Gleichgewicht sich entsprechen. Das bedeutet, daß auch bei individuellen Nicht-Konvexitäten (und irgendeiner den Produktionsumfang begrenzenden zusätzlichen Annahme) das dann erreichbare Gleichgewicht (soweit man es noch als Konkurrenzgleichgewicht bezeichnen kann) einen Pareto-optimalen Zustand angibt.

Lediglich für den Fall, daß gesamtwirtschaftlich gesehen Nicht-Konvexitäten vorliegen - dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn die individuellen Nicht-Konvexitäten über Kooperation oder Fusion zu einer Monopolisierung eines Marktes führen - kann keiner der hier beschriebenen Mechanismen für eine Optimalität des Gleichgewichts sorgen.[1)]

Unsere Ergebnisse lassen folgende Schlußfolgerung zu: Da jedes Konkurrenzgleichgewicht ein Pareto-Optimum ist, laufen die "egoistischen" individuellen Zielsetzungen der Gewinnmaximierung bzw. der Maximierung der Präferenzfunktion und die gesamtwirtschaftliche Zielsetzung der Pareto-Optimalität parallel: Das, was für den einzelnen gut ist, nützt auch der Gesellschaft. Es ist daher kein Wunder, wenn diese Maxime zur Politik des "laissez faire" führte. In ihr drücken sich die Harmonievorstellungen aus, die zu Zeiten von A. Smith des ökonomische Denken prägten.[2)]

E Gleichgewicht und Optimalität im System der Optionsfixierung

Bei der Analyse des Modells der vollständigen Konkurrenz ist ein Fall unerörtert geblieben. Wir hatten gesehen, daß bei vollständigen Nicht-Konvexitäten eine Monopolisierungstendenz auf diesem Markt besteht. Werden keine zusätzlichen Annahmen, deren Vereinbarkeit mit den Annahmen der vollständigen Konkurrenz zweifelhaft ist, getroffen, kommt es zu einer Monopolbildung auf diesem Markt. Man kann versuchen, eine solche Situation für vereinbar mit den Annahmen der vollständigen Konkurrenz zu halten, solange die Unternehmung

---

1) Im nächsten Abschnitt wird diese Behauptung bewiesen.
2) Wie bereits oben erwähnt, ist es die historische Bedeutung dieses und des zuvor dargestellten Modells, die ihre eigenständige Darstellung rechtfertigt.

am Verhalten der Mengenanpassung festhält.[1]

Die Situation auf solchem Markt kann durch folgende Abbildung dargestellt werden.[2]

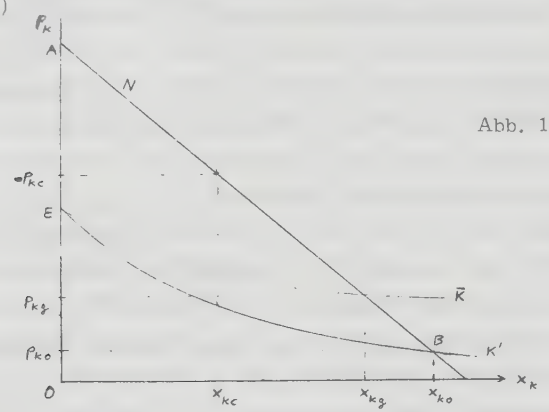


Abb. 1

Mit N wird die Nachfragekurve, mit K' die Grenzkostenkurve und mit K die Durchschnittskostenkurve bezeichnet. Alle Kurven sollen als gesamtwirtschaftliche Kurven aufgefaßt werden können. Wo liegt in solcher Situation das Marktgleichgewicht und wo ein Pareto-Optimum?

Die Frage nach einem Marktgleichgewicht ist relativ einfach zu beantworten. Die Unternehmung bietet nur bei Preisen an, bei denen sie einen Gewinn erzielen kann. Der Preis muß also mindestens die Durchschnittskosten der maximal abzusetzenden Menge x_{kg} decken.[3] Das ist bei p_{kg} der Fall. Die abzusetzenden Mengen werden für alle höheren Preise durch die Nachfragemen-

---

1) Wird diese Art der Vereinbarkeit abgelehnt, dürfen Nicht-Konvexitäten der beschriebenen Form überhaupt nicht in einem System der vollständigen Konkurrenz zugelassen werden. Derartig restriktiv wollen wir jedoch nicht vorgehen. Die obige Interpretation wird daher zugelassen.

2) Diese Situation ist eine von sechs verschiedenen Konstellationen zwischen Nachfrage-, Durchschnittskosten- und Grenzkostenkurve. Alle diese Konstellationen werden bei Krause-Junk behandelt. (vgl. G. Krause-Junk, a.a.O., S. 106 ff.) Wenn wir uns im folgenden auf eine zweidimensionale Darstellung beschränken, so ist diese Partialanalyse anstelle einer Totalanalyse zulässig, wenn von einem "konstanten Grenznutzen des Einkommens" ausgegangen wird. (vgl. P.A. Samuelson, Pure Theory of Public Expenditure and Taxation, in: Public Economics, J. Margolis - H. Guitton (eds.), London 1969 , S. 111, P.A. Samuelson, Constancy of the Marginal Utility of Income, in: The Collected Scientific Papers of P.A. Samuelson, J.E. Stiglitz (ed.) Vol. 1, Cambridge 1966, S. 37 ff.)

3) Die "Totalbedingung" spielt eine wesentliche Rolle beim Problem der "sinkenden Kosten". (s.u.)

gen begrenzt.[1] Das bedeutet aber umgekehrt natürlich auch, daß die Unternehmung die Abhängigkeit zwischen Marktpreis und eigenem Absatz merkt.[2][3] Sie wird daher das Mengenanpasserverhalten aufgeben und stattdessen den Preis setzen. Das Gleichgewicht wird dann durch den Cournot'schen Punkt angegeben: Beim Preis p_{kc} wird die Menge x_{kc} abgesetzt. Erfüllt aber eines dieser möglichen Gleichgewichte die Bedingungen für Pareto-Optimalität?[4] Die Optimalität eines Gleichgewichts kann nicht anhand der Abbildung 1 gezeigt werden. Vielmehr muß dies in der "Güterwelt" gezeigt werden. Dazu genügt die Beschränkung auf eine 2 Güter-Darstellung, wobei Gut x_h als Numeraire-Gut fungiert und daher einen Preis $p_h \equiv 1$ hat. Der Preis p_k bzw. die Kosten von x_k können dann in Einheiten von x_h angegeben werden.

Mit diesen Annahmen läßt sich die Grenzkostenkurve als eine Schar von Transformationskurven uminterpretieren, deren Abschnitte auf der x_h-Achse durch die zur Verfügung stehenden bzw. benötigten Faktoren angegeben werden. Wegen der Annahme über das Numeraire-Gut ist p_k nämlich nichts anderes als die Menge x_h, die für eine Einheit von x_k bezahlt, d.h. aufgegeben werden muß. Es ist also

$$(43) \qquad -p_k = \left.\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right|_T$$

Eine sinkende Grenzkostenkurve bedeutet aber, daß mit steigendem x_k $-p_k$ steigt. Es gilt demnach

$$(44) \qquad \left.\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_k^2}\right|_T > 0$$

d.h. es liegt eine abnehmende Grenzrate der Substitution vor, wodurch die

---

1) Selbstverständlich darf der Fall von Lagerhaltung und Produktion im voraus für eine spätere Periode nicht zugelassen werden.
2) Es sollte beachtet werden, daß in diesem Falle natürlich auch der Tatonnement-Prozeß versagen muß.
3) Genau dies ist der Grund, warum die Annahme der Mengenanpassung im Monopolfall nicht sinnvoll aufrechterhalten werden kann.
4) Pareto-Optimalität liegt hier vor, wenn die höchst mögliche gesellschaftliche Indifferenzkurve erreicht ist. Das setzt voraus, daß eine Schar von eindeutigen gesellschaftlichen Indifferenzkurven existiert. Zu den Annahmen, die dazu erforderlich sind, vergleiche K. Rose, Theorie der Außenwirtschaft, 3. Aufl. Berlin-Frankfurt 1970, S. 298 ff.

Konvexitätsbedingung (E 14) verletzt wird. [1)2)] Die Grenzraten der Substitution sind nur abhängig von der Menge x_k. Auf Parallelen zur x_h-Achse sind sie also jeweils gleich. [3)]

Welche Transformationskurve aus dieser Schar realisiert wird, wird bestimmt durch die vorhandene Menge an x_h.

Die Nachfragekurve kann auf ähnliche Weise in eine Schar von Indifferenzkurven transformiert werden. Die Nachfragekurve ist die Verbindungslinie aller Tangentialpunkte von Preislinien und Indifferenzkurven. Daher gilt auf allen Punkten der Nachfragekurve

$$-p_k = \left.\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right|_I$$

wobei $\left.\frac{\partial x_h}{\partial x_k}\right|_I$ angeben soll, daß es sich um eine Grenzrate der Substitution entlang der Indifferenzkurve handelt. Wenn angenommen wird, daß der Einkommenseffekt bei Gut x_k gleich Null ist, ist die Grenzrate der Substitution nur von der Menge von Gut x_k abhängig. Im x_h, x_k - Koordinatensystem bedeutet das, daß auf jeder Parallelen zur x_h-Achse die Grenzraten der Substitution jeweils gleich sind.

Durch einen Vergleich der Grenzraten der Substitution für gleiche x_k - Werte zeigt sich, daß bis zur Menge x_{ko} die Grenzrate der Substitution entlang einer Indifferenzkurve kleiner ist als die Grenzrate der Substitution entlang einer Transformationskurve. Bei der Menge x_{ko} stimmen beide Grenzraten überein. Für größere Mengen ist die Grenzrate der Substitution für eine Indifferenzkurve größer als die Grenzrate der Substitution für eine Transformationskurve.

Beide Grenzraten werden jedoch mit steigendem x_k größer. Es gilt also

(45) $$\left.\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_k^2}\right|_I > 0 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\partial^2 x_h}{\partial x_k^2}\right|_T > 0$$

---

1) Gleichung (44) kann auch als die Bedingung von "increasing returns to scale" bezeichnet werden.

2) Der Index T deutet an, daß es sich um (Änderungen von) Grenzraten der Substitution bei der Transformationskurve handelt.

3) Dieser Freiheitsgrad entspricht der Wahlfreiheit der Integrationskonstante.

Wegen der unterschiedlich starker Veränderungen gilt im gesamten Bereich

$$(46) \qquad \left.\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_k^2}\right|_I - \left.\frac{\partial^2 x_k}{\partial x_k^2}\right|_T > 0$$

Bei der Menge x_{ko} gilt darüber hinaus

$$\left.\frac{\partial x_k}{\partial x_k}\right|_I = \left.\frac{\partial x_k}{\partial x_k}\right|_T = -p_k$$

Die Marginalbedingungen erster und zweiter Ordnung für ein Pareto-Optimum sind damit bei der Menge x_{go} erfüllt. Diese Pareto-optimale Menge kann aber, wie wir gesehen haben, weder bei einem Verhalten der Mengenanpassung noch bei einer Verhaltensweise der Preisfixierung auf dem monopolisierten Markt erreicht werden. Dieses Ergebnis läßt den Schluß zu, daß der sinkende Teil der Marxigrenzkostenkurve zwar für die Suche nach Pareto-Optimalität, nicht aber für die Suche nach einem Gleichgewicht, Bedeutung hat.

Diese Diskrepanz hat zu der Kontroverse um die "sinkenden Kosten" (decreasing costs) geführt.[1] Sie besteht darin, daß der Pareto-optimale Output auf Märkten mit sinkenden Kosten nicht angeboten wird bzw. - würde er angeboten - mit Verlusten verbunden wäre. Soll aber nun auf die Einhaltung der (Pareto-optimalen) Preis-gleich-Grenzkosten-Regel zugunsten einer Preis-gleich - Durch-

---

1) Unter dem Bereich sinkender Kosten ist der Teil der Produktionsfunktion zu verstehen, für den die Durchschnittskosten sinken, die Grenzkosten also unter ihnen liegen. (vgl. C.J. Oort, a.a.O., S. 105). Die Grenzkosten können auch konstant und speziell gleich Null sein. (vgl. das Brückenbeispiel bei R.A. Musgrave, The Theory of Public Finance, Tokio 1959, S. 137 ff.) Für einen historischen Überblick (allerdings im Zusammenhang mit Externalitäten) vgl. Chipman, (J.S. Chipman, A Survey of the Theory of International Trade, Part 2, in: Econometrica, Vol. 33 (1965) insbes. S. 736 ff.) ferner N. Ruggies, The Welfare Basis of the Marginal Cost Pricing Principle, in: Review of Economic Studies, Vol. 17 (1949-50), S. 29 ff., N. Ruggles, Recent Development in the Theory of Marginal Cost Pricing, in: Review of Economic Studies, Vol. 17 (1949-50), S. 107 ff.

schnittskosten-Festsetzung verzichtet werden[1] oder soll stattdessen der Verlust durch Subventionen ausgeglichen werden? Während jedoch das Kostendeckungsprinzip mit Sicherheit nicht Pareto-optimal ist, kann über Subventionen prinzipiell der optimale Produktionsumfang erzwungen werden. Ihre Finanzierung muß jedoch die "lump-sum" Bedingung erfüllen.

Wie wir gesehen haben, kann weder in einem System, das von der Annahme der Mengenanpassung ausgeht, noch in einem System, das eine Preisfixierung unterstellt, die Pareto-optimale Menge eines Gutes bereitgestellt werden, für das die Marktgrenzkostenkurve sinkt. Beide Systeme sind dadurch charakterisiert, daß die Marktpreise Durchschnittspreise sind, d.h. für jede Einheit des Gutes gilt der gleiche Preis.

Das privatwirtschaftliche System, in dem die Pareto-optimalen Mengen auch bei sinkenden Marktgrenzkosten bereitgestellt werden, muß daher ein System sein, das nicht von der Annahme des einheitlichen Preises ausgeht. Es kann sich hierbei um das System der Optionsfixierung handeln.[2] Für die in Abbildung 1 beschriebene Situation kommt es dann zu folgender Argumentation. Der Anbieter, der ein diskriminierender Monopolist sein soll[3], bietet die erste Einheit des Gutes zu einem Preis an, bei dem die Nachfrager gerade noch kaufen wollen[4]. Dieser Preis wird durch den Abschnitt A der Nachfrage-

---

1) Dieses Kostendeckungsprinzip scheint sich bei öffentlichen Betrieben durchgesetzt zu haben. Thiemeyer bezeichnet den Durchschnittskostenpreis als die noch immer gültige Grundlage aller preistheoretischen Erwägungen von gemeinwirtschaftlichen Unternehmungen. (vgl. T. Thiemeyer, Grenzkostenpreise bei öffentlichen Unternehmen, Köln-Opladen 1964, S. 227). Zu einigen praktischen Problemen vergleiche Little (I.M.D. Little, A Critique of Welfare Economics, 2. Aufl. Oxford 1963, S. 185 ff.)

2) Ein Spezialfall dieses Systems ist der "diskriminierende Monopolist".

3) Genauso gut könnte angenommen werden, daß sich die Nachfrager als Optionsfixierer verhalten oder daß beide Seiten dies versuchen. Dann kann der Preis, zu dem getauscht wird, nur über Verhandlungen zwischen beiden Optionsfixierern gefunden werden.

4) Ein Beispiel für die empirische Relevanz der Optionsfixierung sind Auktionen. Dort bietet jeder Nachfrager solange mit, bis der Preis erreicht ist, der seiner Zahlungsbereitschaft entspricht, also die Konsumentenrente voll abschöpft. Ist das Auktionsverfahren derart, daß der Auktionator zunächst hohe und dann niedrigere Preise nennt, haben die Nachfrager Gelegenheit, durch Warten ihre Konsumentenrente zu vergrößern, allerdings mit dem Risiko, gar nicht zum Zuge zu kommen. Sie werden den Preis nicht sehr weit unter ihre Zahlungsbereitschaft sinken lassen.

kurve auf der Preis-Achse angegeben. In gleicher Weise wird für alle folgenden Einheiten vorgegangen, wobei vorausgesetzt wird, daß sich an den Preisen der vorhergehenden Einheiten nichts ändert. Das Verfahren wird bis zu der Menge fortgesetzt, für die(für die letzte Einheit)die Nachfrager gerade noch den Preis zahlen wollen, der die Produktionskosten dieser Einheit deckt. Es soll angenommen werden, daß dies bei der Menge x_{ko} mit dem Preis p_{ko} der Fall ist. Die Kompensationskurve, die auf diese Weise ermittelt wird,[1] hat jedoch eine vollkommen andere Bedeutung als die Nachfragekurve, mit der sie hier annahmegemäß zusammenfällt. Auf ihr bleibt nämlich das Präferenzniveau der Nachfrage unverändert, während es auf der Nachfragekurve mit sinkendem Preis steigt. Der Unterschied kann im Punkt 3 verdeutlicht werden: Gemäß der Nachfragekurve sind die Nachfrager bereit, für die Menge x_{ko} den Betrag $0x_{ko}$ B A zu zahlen. Genau diesen Betrag mißt die Kompensationskurve. Bei einem Preis p_{ko} müssen sie jedoch nur den Betrag $0x_{ko}$ B p_{ko} zahlen. Den Nachfragern verbleibt also ein Überschuß in Höhe von A p_{ko} B, die Konsumentenrente.[2]

Wären die Nachfrager als Optionsfixierer aufgetreten, hätten sie, um die Menge x_{ko} angeboten zu erhalten, mindestens den Betrag $0x_{ko}$ B E aufwenden müssen. Beim einheitlichen Preis p_{ko} wird jedoch nur der Betrag $0x_{ko}$ B p_{ko} erlöst, so daß die Produzentenrente in diesem Fall negativ ist. Sie beträgt p_{ko} B E.

---

1) Hicks nennt sie die "marginal indifference curve" (vgl. J.R. Hicks, The Generalized Theory of Consumer's Surplus, in: Review of Economic Studies, Vol. 13 (1945/46) S. 68 ff.)

2) Hicks unterscheidet verschiedene Arten der Konsumentenrente. Es besteht zwischen ihnen jedoch kein Unterschied, wenn für das Gut x_k ein Einkommenseffekt von Null unterstellt wird. Genau diese Annahme ist aber auch notwendig, damit die Kompensationskurve und die Nachfragekurve zusammenfallen. (vgl. J.R. Hicks, Die vier Arten der Konsumentenrente, deutsche Übersetzung in: Konsum und Nachfrage E. und M. Streissler, (Hrsg.) Köln-Berlin 1966, S. 187 ff.) Marshall nimmt an, daß die beiden Kurven zusammenfallen, wenn der "Grenznutzen des Geldes" für alle Nachfrager konstant und gleich ist. (vgl. A. Marshall, Principles of Economics, 8. Aufl. London 1964, S. 106). Diese Annahme ist aber weder notwendig noch hinreichend.

Addiert man die Konsumentenrente und die Produzentenrente, dann ergibt sich die Nettorente. Sie wird maximiert für x_{ko} und beträgt dann E B A.

Das bedeutet, daß bei der Pareto-optimalen Menge x_{ko} die Nettorente maximal ist. Es bedeutet aber auch, daß, solange die Nettorendite positiv ist, $x_{ko} \neq 0$ die Pareto-optimale Menge ist. Bei einer negativen Nettorente liegt das Pareto-Optimum dann natürlich bei $x_{ko} = 0$.

Wenn wir unsere Ergebnisse dieses Teiles noch einmal kurz skizzieren wollen, so können wir folgendes feststellen:[1)]

Das System der vollständigen Konkurrenz realisiert bei Erfüllung der Konvexitätsbedingungen die Marginalbedingungen für ein Pareto-Optimum. Ist die Zahl der Wirtschaftseinheiten hinreichend groß, kann selbst bei Nicht-Konvexitäten, sei es in der Form allseitiger Nicht-Konvexitäten oder in der Form ertragsgesetzlicher Produktionsfunktionen, im System auf der Basis der Mengenanpassung ein Pareto-optimales Gleichgewicht erreicht werden. Allerdings muß bei diesen Annahmen nicht immer die Existenz eines Gleichgewichts gesichert sein. In den geschilderten Fällen steigt die Marktangebotskurve und fällt die Marktnachfragekurve.

Trifft diese Voraussetzung jedoch nicht zu, dann kann ein privatwirtschaftliches System, das durch die Einheitlichkeit der Preise gekennzeichnet ist, nicht die Bedingungen für Pareto-Optimalität erfüllen. Kann dann angenommen werden, daß der Einkommenseffekt für dieses Gut gleich Null ist,[2)] kann ein System der Optionsfixierung dafür sorgen, daß die Pareto-optimalen Mengen bereitgestellt werden.

---

1) Die folgenden Ergebnisse finden sich ähnlich bei Krause-Junk (vgl. G. Krause-Junk, a.a.O., S. 105 ff.)

2) Gilt diese Annahme nur annähernd, ist die Maximierung der Nettorente auch nur eine Approximation an ein Pareto-Optimum.

IV Pareto-Optimalität und Gleichgewicht im marktwirtschaftlichen System im Falle vorliegender Externalitäten

Neben Nicht-Konvexitäten wird als zweiter wichtiger Grund für das Versagen eines marktwirtschaftlichen Systems die Existenz von Externalitäten angesehen. Es soll nun nachgeprüft werden, warum diese Behauptung für ein Konkurrenzsystem korrekt ist und ob sie auch für ein System der Optionsfixierung Gültigkeit besitzt. Dazu muß zunächst der Begriff der Externalität erläutert werden. Dann werden die - nun veränderten - Marginalbedingungen darzustellen sein. Daran anschließend wird das konkurrenzwirtschaftliche System auf seine Pareto-Optimalität hin zu untersuchen sein. Schließlich ist zu prüfen, ob ein System der Optionsfixierung Pareto-optimale Zustände realisieren kann.

A. Der Begriff der Externalität

In allen bisher betrachteten Modellen wurde von der Annahme ausgegangen, daß nur die Gütermengen, die die betrachtete Wirtschaftseinheit kontrolliert, in der jeweiligen Präferenzfunktion oder Produktionsbedingung als Variable auftauchen. Das Präferenz- bzw. Produktionsniveau einer Wirtschaftseinheit wird demnach nur durch solche Variablen bestimmt, über deren Umfang diese Wirtschaftseinheit autonom entscheiden kann. Güter, die diese Bedingung erfüllen, können als private Güter bezeichnet werden. Für die formale Darstellung bedeutet das, daß die Präferenzfunktion bzw. Produktionsbedingung einer Wirtschaftseinheit i bzw. j auch nur Variable mit dem gleichen Index i bzw. j enthalten. Dieser Spezialfall stellt eine erhebliche Einschränkung der Realität dar. Daher erscheint es notwendig, nun den allgemeinen Fall zu untersuchen, bei dem auch Gütermengen, die die individuelle Wirtschaftseinheit nicht kontrolliert, ihr Präferenz- bzw. Produktionsniveau direkt beeinflussen. Solche Güter werden als Externalitäten-Güter, Abhängigkeiten dieser Art als Externalitäten bezeichnet.

Das "direkt" bedarf einer Erläuterung. Eine direkte Beeinflussung des Funktionswertes durch ein Externalitäten-Gut liegt dann vor, wenn nicht nur ein Zusammenhang über die allgemeine Interdependenz besteht. Ein solcher Zusammenhang liegt bei den hier betrachteten Modellen immer vor.[1] Er recht-

---

1) So bewirkt beispielsweise eine verringerte Nachfrage nach Automobilen aufgrund einer Energiekrise durch eine Gruppe von Haushalten über den verringerten Marktpreis dieses Gutes eine Mehrnachfrage nach Substitutionsgütern, wodurch der Marktpreis dieser Güter steigt. Forts. S. 80

fertigt aber nicht die Bezeichnung Externalität, weil es dann gar keine Zusammenhänge gäbe, die nicht als Externalität zu bezeichnen wären. Dann wäre der Begriff Externalität aber überflüssig.

Formal gilt bei indirekter Abhängigkeit für Präferenzfunktionen

(47) $u^i = u^i(x_k^i(x_k^s))$ für $k,h = 1,\dots,e$ und $s = 1,\dots,n$ $s \neq i$

und bei direkter Abhängigkeit

(48) $u^i = u^i(x_k^i; x_h^s)$ für $k,h = 1,\dots,e$ und $s = 1,\dots,n$ $s \neq i$

Hier liegt eine Externalität vor, da die "fremden" Variablen[1] ohne "Umweg" das Präferenzniveau beeinflussen. Der Unterschied zwischen direkter und indirekter Abhängigkeit kann auch darin gesehen werden, daß erstere die Gestalt und/oder die Lage der Indifferenzkurven bzw. der Produktionsfunktionen ändern, letztere dagegen nicht.[2]

Gleichung (48) kann generalisiert werden. Dadurch ergibt sich für den allgemeinsten Fall von Externalitäten bei Präferenzfunktionen

(49) $u^i = u^i(x_1^i,\dots,x_e^i; x_1^1,\dots,x_e^1,\dots,x_1^n,\dots x_e^n, {}_1x_1,\dots,{}_1x_e,\dots,{}_mx_1,\dots,{}_mx_e)$

und bei Produktionsbedingungen

(50) ${}_jT = {}_jT({}_jx_1,\dots,{}_jx_e; x_1^1,\dots x_e^1,\dots,x_1^n,\dots,x_e^n, {}_1x_1,\dots,{}_1x_e,\dots,{}_mx_1,\dots,{}_mx_e)$

Haushalte, die nur diese Substitutionsgüter zu kaufen pflegen, werden dadurch in ihrem Präferenzniveau beeinträchtigt.

1) Bei fremden Variablen ist s = i

2) Externalitäten werden in der Literatur keineswegs einheitlich definiert. (Vergleiche die Zusammenstellungen bei Margolis-Vincent oder Mishan.) (J. Margolis - P. E. Vincent, External Economic Effects, Stanford 1966, E. J. Mishan, Reflections on Recent Developments in the Concept of External Effects, in: The Canadian Journal of Economics and Political Science, Vol. 31 (1965) S. 3 ff., E. J. Mishan, The Postwar Literature on Externalities: An Interpretative Essay, in: Journal of Economic Literature, Vol. 9 (1971) S. 1 ff.)) Einige andere Definitionen seien deshalb hier genannt. Buchanan - Stubblebine scheinen ebenfalls die - Forts. S. 81

hier gewählte Definition zu meinen, obwohl sie die bloße indirekte Abhängigkeit nicht ausgeschlossen zu haben scheinen. (vgl. J. M. Buchanan - W. C. Stubblebine, Externality, in: Economica, N. S. Vol. 29 (1962),S. 371 ff.) In die gleiche Richtung gehen auch die Überlegungen Bator's, der die "direct action" als zentral ansieht. (vgl. F. M. Bator, The Anatomy of Market Failure, in: Quarterly Journal of Economics,Vol. 72 (1958), S. 351 ff.) Auch Graaff scheint diese Definition im Auge zu haben, wenn er als Externalität eine Verschiebung von Lage und/oder Gestalt von Indifferenz- bzw. Transformationskurven bezeichnet. (vgl. J. de V. Graaff, a.a.O., S. 18 und S. 43). Mishan verwendet in zwei Artikeln unterschiedliche Definitionen. Im späteren Artikel verwendet er die hier gewählte Definition, während im früheren Artikel entscheidend ist, ob eine Aktivität über den Preismechanismus abgegolten wird oder nicht (priced-unpriced effects). (vgl. E.J. Mishan, Reflections ..., a.a.O., S. 3 ff., E.J. Mishan, Postwar ..., a.a.O., S. 4 ff.). Eine unentgeltliche Leistungsaufnahme bzw. -abgabe wird häufig auch mit der hier gewählten Definition vereinbar sein. Auf die Unentgeltlichkeit der Leistungsaufnahme stellen auch Meade und Portes ab. (vgl. J.E. Meade, External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation in: Economic Journal Vol. 62 (1952) S. 54 ff., R. Portes, The Search for Efficiency in the Presence of Externalities, in: Unfashionable in Economics, Essays in Honour of Lord Balogh, P. Streeten (ed.), London 1970, S. 348 ff.) Bei Meade wird sie unterteilt in "unpriced factors" and "creation of atmosphere", wobei sich diese Begriffe auf unterschiedliche Annahmen über den Homogenitätsgrad der Produktionsfunktion beziehen. Bei Portes äußert sie sich in einer Gewinnänderung einer Unternehmung durch die fremde Aktivität. In diese Richtung argumentiert auch Scitovsky, wenn für ihn eine Abweichung zwischen "private profits" und "social benefits" als Folge von "services rendered free" als Kriterium für Externalitäten gilt. (vgl. T. Scitovsky, Two Concepts of Externality, in: Journal of Political Economy,Vol. 62 (1954), S. 143 ff.) Ähnlich ist auch Turvey's Bedingung eines "excess of social over private costs" bei positiven externen Effekten. (vgl. R. Turvey, On Divergencies between Social Cost and Private Cost, in: Economica, Vol. 30 (1963), S. 309 ff.)
Eine recht eigenartige Definition wählt Baumol, indem er Externalitäten über die gemischten Ableitungen einer Wohlfahrtsfunktion charakterisiert. (vgl. W.J. Baumol, External Economies and Second-Order Optimality Conditions, in: American Economic Review, Vol. 54 (1964), S. 358 ff.) Dadurch fallen alle Fälle separierbarer Externalitäten weg, andererseits sind bei ordinalem Charakter der Wohlfahrtsfunktion W immer solche monoton steigenden Transformationen V (W) möglich, daß aus $W_{kh} > 0$ gerade $V_{kh} < 0$ und aus $W_{kh} = 0$ gerade $V_{kh} \neq 0$ wird. Die kuriosen Folgen aus dieser Definition hat Krause-Junk dargestellt. (vgl. G. Krause-Junk, a.a.O., S. 79 ff.)
Zu erwähnen wäre noch eine Definition, bei der die Externalität nicht über fremde Güter- und Faktorleistungen, sondern durch ein fremdes Präferenzniveau definiert wird. (Habgier, Neid, Altruismus). Diese Definition wird hier nicht gewählt, weil erstens ein ordinaler Index keine kardinale Aussagekraft hat und man zweitens seinen Nachbarn wohl weniger seines tatsächlichen "Glücksgefühls" wegen beneidet, als vielmehr seiner konkreten Gütermengen bzw. des "Glücksgefühls" wegen, das man selber aus diesen Mengen glaubt ziehen zu können.
Schließlich soll noch auf eine Definition hingewiesen werden, - Forts. S. 82

Ein Spezialfall der Externalitäten-Güter sind die "öffentlichen Güter".[1] Ein Gut wird als öffentliches Gut bezeichnet, wenn es keine Rolle spielt, wer die Mengen dieses Gutes kontrolliert, also nur die Gesamtmenge dieses Gutes in alle Präferenzfunktionen eingeht. Ist Gut e ein öffentliches Gut, erhält Gleichung (49) bei Abwesenheit sonstiger Externalitäten-Güter die Form

$$(49') \quad u^i = u^i\left(x_1^i, \dots, x_{e-1}^i; \sum_{s=1}^{n} x_e^s\right) \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n \quad i \neq s$$

Externalitäten werden als externe Vorteile (Nachteile) bezeichnet, wenn gilt

$$(51) \quad u^i(\dots \tilde{x}_k^i \dots; \dots \tilde{x}_h^t \dots; x_g^s \neq 0) \gtrless u^i(\dots \tilde{x}_k^i \dots; \dots \tilde{x}_h^t \dots; x_g^s = 0) \quad \text{für } s \neq i$$

Externalitäten werden als marginale externe Vorteile (Nachteile) bezeichnet, wenn gilt

$$(52) \quad \frac{\partial u^i}{\partial x_g^s} \gtrless 0$$

Damit ist definiert, was unter Externalitäten zu verstehen ist. Es ist nun zu prüfen, welche Veränderungen die Marginalbedingungen für Pareto-Optimalität erfahren, wenn Externalitäten in der Volkswirtschaft vorliegen.

B Ableitung der Marginalbedingungen für Pareto-Optimalität

Es soll die gleiche Methode zur Ermittlung der Bedingungen erster und zweiter Ordnung gewählt werden wie bei II E. Wir wollen daher das Präferenzniveau eines der Haushalte[2] maximieren unter den Nebenbedingungen vorgegebener

---

die jedoch irreführend ist. Viner unterscheidet nämlich "technological external economies" und "pecuniary external economies". Darunter versteht er die hier "direkt" und "indirekt" genannten Effekte. Wie wir erläutert haben, ist der Begriff der pekuniären externen Effekte jedoch überflüssig. (vgl. J. Viner, Cost Curves and Supply Curves, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 3 (1931) S. 23 ff.; wiederabgedruckt in: Readings in Price Theory, G. Stigler - K. E. Boulding (eds.), Chicago 1952, S. 198 ff., insbesondere S. 213 und S. 217)

1) Samuelson spricht von "collective consumption goods" (vgl. P. A. Samuelson, The Pure Theory ..., a.a.O. S. 387)
Musgrave spricht von "social wants".(vgl. R. A. Musgrave, a.a.O., S. 8)

2) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann Haushalt 1 gewählt werden.

Präferenzniveaus der anderen Haushalte, der m Produktionsbedingungen und der vollständigen Aufteilung der e Güter. Dabei treten an die Stelle der Funktion (3) und (5) die Funktionen (49) und (50).

Bedingung (7) gilt unverändert. Damit der Lagrange-Ansatz gewählt werden kann, muß unterstellt werden, daß mindestens ein Gut für alle Wirtschaftseinheiten ein privates Gut ist.[1)2)] Alle anderen Güter können private, Externalitäten- oder öffentliche Güter sein oder eine Mischung aus diesen Möglichkeiten darstellen.[3)] Wir wollen jedoch alle Güter, vom privaten Gut 1 abgesehen, wie Externalitäten-Güter behandeln.

Mit diesen Annahmen ergibt sich die Lagrange-Funktion M, deren Maximum bestimmt werden soll.

(53)
$$M = u^1(x_1^1, \ldots, x_k^s, \ldots x_e^n, {}_1x_1, \ldots, {}_rx_h, \ldots, {}_mx_e)$$
$$+ \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \left[u^i(x_1^1, \ldots, x_k^s, \ldots x_e^n, {}_1x_1, \ldots, {}_rx_h, \ldots, {}_mx_e) - \bar{u}^i \right]$$
$$- \sum_{j=1}^{m} \mu_j \, {}_jT(x_1^1, \ldots, x_k^s, \ldots x_e^n, {}_1x_1, \ldots, {}_rx_h, \ldots {}_mx_e)$$
$$+ \sum_{k=1}^{e} \nu_k \left(\sum_{r=1}^{m} {}_rx_k - \sum_{s=1}^{n} x_k^s \right)$$

wobei $i = 2, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, m$; $k = 1, \ldots, e$;
$s = 1, \ldots, n$; $r = 1, \ldots, m$; $h = 1, \ldots, e$

für $h, k = 1$ gilt:

x_1^s taucht nur in der Präferenzfunktion U^s auf.

${}_rx_1$ taucht nur in der Produktionsbedingung ${}_rT$ auf.

---

1) Hier wird Gut 1 gewählt.
2) Die Notwendigkeit dieser Annahme wird im Verlauf der Analyse deutlich.
3) So liegen beispielsweise einseitige Externalitäten vor, wenn Gut k, das Haushalt i kontrolliert, auf Haushalt s Externalitäten ausübt, nicht aber das Gut k, das Haushalt s kontrolliert, auf Haushalt i.

Die Bedingungen erster Ordnung für ein inneres lokales Maximum ergeben das Gleichungssystem

(54a) $$\frac{\partial M}{\partial x_1^1} = \frac{\partial u^1}{\partial x_1^1} - \nu_1 = 0$$

(54b) $$\frac{\partial M}{\partial x_k^1} = \frac{\partial u^1}{\partial x_k^1} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \frac{\partial u^i}{\partial x_k^1} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial {}_jT}{\partial x_k^1} - \nu_k = 0$$

(54c) $$\frac{\partial M}{\partial x_1^s} = \lambda_s \frac{\partial u^s}{\partial x_1^s} - \nu_1 = 0$$

(54d) $$\frac{\partial M}{\partial x_k^s} = \frac{\partial u^1}{\partial x_k^s} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \frac{\partial u^i}{\partial x_k^s} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial {}_jT}{\partial x_k^s} - \nu_k = 0$$

(54e) $$\frac{\partial M}{\partial {}_\tau x_1} = -\mu_j \frac{\partial {}_jT}{\partial {}_\tau x_1} + \nu_1 = 0 \qquad \tau = j$$

(54f) $$\frac{\partial M}{\partial {}_\tau x_k} = \frac{\partial u^1}{\partial {}_\tau x_k} + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i \frac{\partial u^i}{\partial {}_\tau x_k} - \sum_{j=1}^{m} \mu_j \frac{\partial {}_jT}{\partial {}_\tau x_k} + \nu_k = 0$$

(54g) $$\frac{\partial M}{\partial \lambda_i} = u^i(\cdots x_k^s \cdots, \cdots {}_\tau x_h \cdots) - \bar{u}^i = 0$$

(54h) $$\frac{\partial M}{\partial \mu_j} = -{}_jT(\cdots x_k^s \cdots, \cdots {}_\tau x_h \cdots) = 0$$

(54i) $$\frac{\partial M}{\partial x_k} = \sum_r x_k - \sum_s x_k^s = 0$$

Durch Umformung erhält man

1. Die Bedingungen des isolierten Tausches

(55) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^s}{\partial x_k^s} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial x_k^s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^t}{\partial x_k^t} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial x_k^t}$$ [1]

Bedingung (55) verlangt, daß in einem inneren lokalen Maximum der Funktion M die Summe der Grenzraten der Substitution aller Haushalte abzüglich der Summe der Grenzraten der Substitution aller Unternehmungen zwischen einem privaten Gut und einem Externalitäten-Gut, das von Haushalt s kontrolliert wird, gleich sein muß der Summe der Grenzraten der Substitution aller Haushalte abzüglicher der Summe der Grenzraten der Substitution aller Unternehmungen zwischen dem privaten Gut und Externalitäten-Gut, das von Haushalt t kontrolliert wird.

2. Die Bedingungen der isolierten Produktion

(56) $$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^s}{\partial_r x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial_r x_k} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^t}{\partial_q x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial_q x_k}$$

und

3. Die Bedingungen einer integrierten Volkswirtschaft

(57) $$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^s}{\partial x_k^s} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial x_k^s} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i^t}{\partial_r x_k} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial_j x_1}{\partial_r x_k}$$

Diese Bedingungen müssen genauso wie Bedingung (55) interpretiert werden, nur ändert sich jeweils die kontrollierende Wirtschaftseinheit.
Die Marginalbedingungen (55) - (57) geben Spezialfälle an, da alle Externalitäten-Güter jeweils gegen ein privates Gut getauscht werden. Im Falle des Tausches von zwei Externalitäten-Gütern k und g erhält (55) die folgende

---

1) Alle Grenzraten der Substitution beziehen sich natürlich auf die Indifferenz- bzw. Transformationskurven der Wirtschaftseinheiten, die das private Gut kontrollieren.

Form[1)]

$$(55') \qquad \frac{\sum_i \frac{\partial x_1^i}{\partial x_k^s} - \sum_j \frac{\partial_j x_1}{\partial x_k^s}}{\sum_i \frac{\partial x_1^i}{\partial x_g^s} - \sum_j \frac{\partial_j x_1}{\partial x_g^s}} = \frac{\sum_i \frac{\partial x_1^i}{\partial x_k^t} - \sum_j \frac{\partial_j x_1}{\partial x_k^t}}{\sum_i \frac{\partial x_1^i}{\partial x_g^t} - \sum_j \frac{\partial_j x_1}{\partial x_g^t}}$$

In dieser Bedingung sind sowohl die Gleichungen (55) als auch (11) als Spezialfälle enthalten.

Die Bedingungen zweiter Ordnung werden wieder durch Vorzeichenbedingungen für die Determinante der Matrix aus den zweiten partiellen Ableitungen nach allen Variablen angegeben. Umformungen wie oben ergeben schließlich eine mit einem Faktorprodukt zu multiplizierende Determinante aus einer Matrix, deren Elemente kardinal interpretierbar sind. Das Faktorprodukt ist das gleiche wie in Gleichung (20), nämlich

$$(-1)^e \prod_{i=2}^{n} \left(-(u_i^i)^2\right) \cdot \prod_{j=1}^{m} \left(-(u_1^j)^2\right) \left(-u_1^1\right)^{(n+m-1)(e-1)}$$

Die Matrix besitzt in der Zeile x_k^s und der Spalte x_h^t das folgende Element (wobei $s,t = 2, \dots, m$; $k,h = 2, \dots, e$)

$$(58) \qquad \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} - \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_h^t} - \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_h^1 \partial x_k^s} + \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^s \partial x_h^t}$$

$$- \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} + \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^1 \partial x_h^t} + \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_h^1 \partial x_k^s} - \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^s \partial x_h^t}$$

In Zeile (Spalte) x_k^s und Spalte (Zeile) x_h^r steht folgendes Element

$$(59) \qquad - \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} + \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_h^1 \partial x_k^s} + \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_r x_h} - \sum_i \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^s \partial x_r x_h}$$

$$+ \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} - \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_h^1 \partial x_k^s} - \sum_j \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^1 \partial_r x_h} + \sum \frac{\partial_j^2 x_1}{\partial x_k^s \partial_r x_h}$$

---

1) Weitere Vereinfachungen sind nicht möglich. (55') zeigt, daß es nicht möglich ist, ohne den "Umweg" über ein privates Gut Grenzraten der Substitution zwischen Externalitäten-Gütern zu bilden. Das bedeutet aber, daß die Bedingungen (55) - (57) hinreichend für die Bedingungen erster Ordnung sind.

Die Elemente in Zeile ${}_{r}x_{h}$ und Spalte ${}_{q}x_{k}$ schließlich haben folgendes Aussehen

$$(60)\quad \sum_{i} \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_h^1} - \sum_{i} \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_k^1 \partial x_r^h} - \sum_{i} \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_h^1 \partial x_q^k} + \sum_{i} \frac{\partial^2 x_1^i}{\partial x_r^h \partial x_q^k}$$

$$- \sum_{j} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^j \partial x_h^1} + \sum_{j} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_k^j \partial x_r^h} + \sum_{j} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_h^1 \partial x_q^k} - \sum_{j} \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_r^h \partial x_q^k}$$

Diese Elemente enthalten als Spezialfälle selbstverständlich die Elemente der Matrix in Gleichung (20).

Die Vorzeichenbedingungen für die Determinante der Matrix dieser Elemente sind ähnlich wie oben: Alle Elemente der Hauptdiagonalen müssen positiv sein. Das sind in (58) alle Elemente mit s = t und k = h und in (60) alle Elemente mit r = q und k = h. Entsprechend müssen die Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen in der Regel absolut kleiner sein als die Elemente der Hauptdiagonalen.[1)]

Es läßt sich die Feststellung treffen, daß aus der Existenz von Externalitäten nicht gefolgert werden darf, daß sie die "Wahrscheinlichkeit erhöhen, daß die Konvexitätsbedingungen verletzt sind".[2)] Vielmehr besteht genauso die Möglichkeit, daß nicht-konvexe Funktionen durch konvexe Externalitäten überkompensiert werden.

Wenn diese Konvexitätsbedingungen nicht erfüllt sind, gelten andere Bedingungen für Pareto-Optimalität. Wir wollen sie jedoch hier nicht mehr (wieder) ableiten und unterstellen im folgenden, daß Konvexität vorliegt.

---

1) Genauer lassen sich die Bedingungen ohne weitere Einschränkungen nicht angeben.

2) siehe W.J. Baumol, a.a.O., S. 358

C Unmöglichkeit der Pareto-Optimalität des Systems der vollständigen Konkurrenz

In Teil III konnte gezeigt werden, daß ein Konkurrenzgleichgewicht bei Erfüllung der Konvexitätsbedingungen die Marginalbedingungen für Pareto-Optimalität realisiert, wenn keine Externalitäten vorliegen. Es ist nun zu untersuchen, ob das Gleichgewicht im System der vollständigen Konkurrenz auch dann Pareto-optimal ist, wenn unterstellt wird, daß Externalitäten vorliegen. Der Einfachheit halber soll davon ausgegangen werden, daß die Konvexitätsbedingungen erfüllt sind.
In III B wurden die Bedingungen für ein Konkurrenzgleichgewicht abgeleitet. An dieser Stelle braucht daher nur geprüft zu werden, ob sie mit den Marginalbedingungen für Pareto-Optimalität (Gleichungen (55) -(57)) kompatibel sind. Es genügt, dazu ein Modell mit 2 Haushalten und 2 Gütern zu betrachten, wobei Gut 1 ein privates Gut und Gut 2 ein Externalitäten-Gut sein soll. Darüberhinaus soll angenommen werden, daß die Externalität einseitig von Haushalt 1 auf Haushalt 2 ausgeübt werden. Die Optimalitätsbedingung (55)[1] nimmt dann die spezielle Gestalt an

$$(61) \qquad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^1} + \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1} = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^2}$$

Im Konkurrenzgleichgewicht gilt dagegen wegen Gleichung (28'')

$$(62) \qquad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^1} = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^2} = -\frac{p_2}{p_1}$$

Das bedeutet, daß im Konkurrenzgleichgewicht der Term $\frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1}$ nicht berücksichtigt wird. Die Externalität wird also nicht internalisiert.
Mit den Gleichungen (61) und (62) kann gezeigt werden, in welcher Weise die gleichgewichtige Menge von der Pareto-optimalen Menge abweicht. Liegen nämlich marginale positive externe Effekte vor, ist $\frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1} < 0$. Für die gleichgewichtige Menge ist damit

---

1) In analoger Weise gilt das folgende auch für die Optimalbedingungen (56) und (57).

$$(61') \quad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^1} + \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1} < \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^2}$$

Wegen der Erfüllung der Konvexitätsbedingungen bedeutet das, daß der Umfang von x_2^1 ausgedehnt werden muß, damit der Pareto-optimale Umfang realisiert wird. Das ist genau das bekannte Ergebnis Pigou's[1], daß in einem Gleichgewicht des Konkurrenzsystems bei Vorliegen marginaler positiver (negativer) externer Effekte die bereitgestellten Gütermengen unteroptimal (überoptimal) sind.

Die Ursache für dieses Marktversagen liegt darin, daß die Wirtschaftseinheiten nur bestrebt sind, ihren individuellen Gewinn , bzw. ihr individuelles Präferenzniveau zu maximieren,und nicht die Nebenwirkungen ihrer Aktivitäten berücksichtigen. Diese Überlegung führt dazu, zwischen privaten und sozialen Wirkungen zu unterscheiden. So wird der erste Term der linken Seite in Gleichung (61) als private Grenzrate der Substitution und die gesamte linke Seite als soziale Grenzrate der Substitution bezeichnet. Auf der rechten Seite fallen beide Grenzraten zusammen[2].

Das Marktversagen eines Konkurrenzsystems kann auch für reziproke Externalitäten gezeigt werden. Die Optimalbedingung (55) lautet dann bei ansonsten gleichen Annahmen

$$(63) \quad \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^1} + \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^1} = \frac{\partial x_1^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial x_1^1}{\partial x_2^2}$$

Hier gelten die gleichen Feststellungen wie oben: Die Haushalte berücksichtigen bei der Zielsetzung individueller Präferenzniveaumaximierung nur jeweils den ersten Term auf beiden Seiten der Gleichung. Die Gleichgewichtsmengen werden also in aller Regel von den Pareto-optimalen Mengen abweichen.

Doch ist ein Fall denkbar, in dem ein Konkurrenzgleichgewicht für die Pareto-optimalen Mengen sorgt, wenn nämlich die beiden Externalitäten-Terme gerade

---

1) vgl. A.C. Pigou, The Economics of Welfare, 4. Aufl., London 1960, S. 224.

2) Wie schon erwähnt, basiert auf dieser Unterscheidung bzw. der entsprechenden Unterscheidung in private und soziale Kosten die Definition von Externalität bei Turvey und Scitovsky. (vgl. R. Turvey, a.a.O., T. Scitovsky, a.a.O.) Ihre Definition bezieht sich also ausschließlich auf marginale externe Effekte.

gleich groß sind.[1)]
Es kann jedoch festgestellt werden, daß ein Konkurrenzgleichgewicht in aller Regel nicht Pareto-optimal ist.

D. Pareto-Optimalität modifizierter Konkurrenzsysteme

Es ist gezeigt worden, daß das System der vollständigen Konkurrenz nicht in der Lage ist, Externalitäten zu internalisieren und damit Pareto-optimale Gleichgewichte zu erreichen. Diese Tatsache wird als zentrales normatives a priori Argument für die ökonomische staatliche Aktivität angesehen. Es ist jedoch denkbar, daß innerhalb des privaten Sektors der Volkswirtschaft Mechanismen existieren, mit deren Hilfe die individuellen Gleichgewichte im Konkurrenzsystem ohne staatliche Intervention so modifiziert werden können, daß Pareto-optimale Gleichgewichte erreicht werden. Einer dieser Mechanismen, nämlich das System der Optionsfixierung, wurde bereits in Teil III D erläutert. Daneben sollen jedoch auch die Mechanismen eines Quasi-Tatonnement-Prozesses, der Kooperation und der Nicht-Kooperation im Sinne der Spieltheorie behandelt werden. Erst wenn sich herausstellt, daß alle diese Mechanismen ein Marktversagen nicht verhindern können, hat man ein wirkliches a priori Argument für staatliche Allokationspolitik. Die Leistungsfähigkeit staatlicher Intervention kann anhand des Beispiels eines Steuer-Subventionsmechanismus exemplarisch erläutert werden.

1. Das Quasi-Konkurrenzsystem

Das Quasi-Konkurrenzsystem ist eine Art Konkurrenzsystem, bei dem für jede Externalität ein eigener neuer Markt simuliert wird. Es gibt dann einen Markt für das Externalitäten-Gut, auf dem gemäß Gleichung (28)[2)] individuelles Gleichgewicht erreicht wird, und einen simulierten Markt für die Externalität, auf dem gemäß des rechten Terms der linken Seite in Gleichung (61) ein optimaler Umfang der Externalität und damit auch die Pareto-optimale Veränderung

---

1) Allerdings ist diese partielle Betrachtungsweise unzureichend, denn nach wie vor wären für ein Modell mit mehreren Haushalten die Marginalbedingungen dritten Haushalten gegenüber nicht erfüllt. Immerhin ist es also möglich, daß ein Konkurrenzgleichgewicht auch bei Vorliegen von Externalitäten Pareto-optimal ist.

2) Insofern die Externalität im Konsumbereich vorliegt

des individuellen Gleichgewichtsumfangs bestimmt werden kann. Die Funktionsfähigkeit dieses simulierten Marktes kann mit einem Beispiel erläutert werden, bei dem zwischen zwei Unternehmungen eine einseitige Externalität besteht.[1] Ausgangspunkt des nun einsetzenden Anpassungsprozesses ist die aus Bedingung (28') resultierende Gleichgewichtsmenge $_1\bar{x}_2$. In einer Art Tatonnement-Prozeß bestimmen Unternehmung 1 als Anbieter und Unternehmung 2 als Nachfrager einen Gleichgewichtspreis auf diesem fiktiven Markt.[2] Die diesem Gleichgewichtspreis entsprechende Mengenänderung $(_1x_2 - _1\bar{x}_2)$ wird von Unternehmung 1 vorgenommen, die dafür von Unternehmung 2 in Höhe von $p_E(_1x_2 - _1\bar{x}_2)$ Kompensationszahlungen erhält, wobei p_E der Gleichgewichtspreis der Externalität ist. Im Falle positiver marginaler externer Effekte kommt es zu einer Mengenausweitung, bei negativen zu einer Mengenreduktion. Für beide Unternehmungen ist der Quasi-Tatonnement-Prozeß vorteilhaft, wenn sich ihre Renten erhöhen.

Die Richtung der Zahlungen ist nur im ersten Fall eindeutig: Der Empfänger zahlt an den Verursacher der Externalität. Im zweiten Fall sind je nach Rechtsordnung unterschiedliche Zahlungsrichtungen möglich: Gestattet sie der Unternehmung 1 eine freie Wahl des Umfangs der Aktivität, wird Unternehmung 2 eine Reduktion des Umfangs erkaufen müssen. Der Zahlungsstrom läuft also wieder vom Betroffenen zum Verursacher. Gilt für Schädigungen dagegen das Verursacherprinzip, muß Unternehmung 1 für das Recht der Schädigung zahlen.[3]

---

1) Die Externalität soll durch $_1x_2$ verursacht sein.

2) Eine ähnliche Darstellung findet sich bei Buchanan. (J. M. Buchanan, The Demand and Supply of Public Goods, Chicago 1968, S. 23)

3) Bedeutung hat die Unterschiedlichkeit der Rechtsordnung nicht so sehr der Verteilungseffekte wegen - wir haben ja unterstellt, daß mit "lump sum" Zahlungen immer die richtige Verteilung ermöglicht wird - als vielmehr wegen der Möglichkeit, daß die jeweils resultierenden Pareto-optimalen Mengen unterschiedlich sein werden. (siehe F. T. Dolbear Jr., On the Theory of Optimum Externality, in: American Economic Review, Vol. 57 (1967), S. 90 ff.)

Die Quasi-Konkurrenzpreise für die Externalität garantieren die Pareto-Optimalität des Quasi-Konkurrenzsystems. Diese Behauptung wollen wir für das Beispiel beweisen. Die wegen des Externalitäten-Marktes modifizierten Gewinne betragen für die beiden Unternehmungen[1)]

$$(64) \quad {}_1G = \sum_k p_k {}_1x_k + p_E({}_1x_2 - {}_1\bar{x}_2) - s_1 {}_1T({}_1x_1, {}_1x_2)$$

und

$$(65) \quad {}_2G = \sum_k p_k {}_2x_k - p_E({}_1x_2 - {}_1\bar{x}_2) - s_2 {}_2T({}_2x_1, {}_2x_2, {}_1x_2)$$

Die Quasi-Konkurrenzgleichgewichte werden wegen

$$(66a) \quad \frac{\partial {}_1G}{\partial {}_1x_1} = p_1 - s_1 \frac{\partial {}_1T}{\partial {}_1x_1} = 0$$

$$(66b) \quad \frac{\partial {}_1G}{\partial {}_1x_2} = p_2 + p_E - s_1 \frac{\partial {}_1T}{\partial {}_1x_2} = 0$$

$$(67a) \quad \frac{\partial {}_2G}{\partial {}_2x_1} = p_1 - s_2 \frac{\partial {}_2T}{\partial {}_2x_1} = 0$$

$$(67b) \quad \frac{\partial {}_2G}{\partial {}_2x_2} = p_2 - s_2 \frac{\partial {}_2T}{\partial {}_2x_2} = 0$$

$$(67c) \quad \frac{\partial {}_2G}{\partial {}_1x_2} = -p_E - s_2 \frac{\partial {}_2T}{\partial {}_1x_2} = 0$$

angegeben durch die Gleichgewichtsbedingungen

---

1) Die Externalität soll positiv sein.

$$(68) \quad -\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial_1 x_1}{\partial_1 x_2} + \frac{\partial_2 x_1}{\partial_1 x_2} = \frac{\partial_2 x_1}{\partial_2 x_2}$$

Der Gleichgewichtspreis auf dem fiktiven Markt ist

$$(69) \quad p_E = p_1 \frac{\partial_2 x_1}{\partial_1 x_2} = p_2 \frac{\partial_2 x_2}{\partial_1 x_2}$$

Im Quasi-Gleichgewicht muß er gleich den mit den Marktpreisen bewerteten Grenzraten der Substitution der privaten Güter der Unternehmung 2 durch das Externalitäten-Gut der Unternehmung 1 sein. Sind ${}_2x_k$ und ${}_1x_2$ vollkommene Substitute, ist $p_E = -p_k$. Bei unvollkommenen Substituten gilt $0 < p_E < p_k$

Die Bedingungen zweiter Ordnung für Unternehmung 2 verlangen[1]

$$(70) \quad {}_2G'' = -({}_2T_1)^2 (-p_2 \, {}_2T_1)^2 \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2 {}_2x_1}{(\partial {}_2x_2)^2} & -\frac{\partial^2 {}_2x_1}{\partial_2 x_2 \partial_1 x_2} \\ -\frac{\partial^2 {}_2x_1}{\partial_2 x_2 \partial_1 x_2} & -\frac{\partial^2 {}_2x_1}{(\partial_1 x_2)^2} \end{vmatrix} < 0$$

also auch speziell

$$(70') \quad -\frac{\partial^2 {}_2x_1}{(\partial_1 x_2)^2} > 0$$

(70') erfordert, daß die Konvexitätsbedingungen nicht nur für die eigenen Variablen, sondern auch unter Einschluß der fremden Variablen erfüllt sein müssen. Gilt (70') nicht, bedeutet das, daß wegen der Negativität der Nachfragerrente bei Unternehmung 2 der Quasi-Konkurrenzmechanismus zu keinem Gleichgewichtspreis für die Externalität führt. Jedoch führt auch in diesem Fall der oben beschriebene Mechanismus der Optionsfixierung[2] zu einem Quasi-Gleichgewicht und damit zu einem Pareto-Optimum, solange auf dem Externalitäten-Markt überhaupt eine positive Nettorente besteht.

---

1) Für Unternehmung 1 gelten die unter III B 1 abgeleiteten Bedingungen.
2) unter den gleichen Annahmen wie oben

Es ist in der Literatur strittig gewesen, ob, wie hier unterstellt, beide Unternehmungen mit Zahlungen belastet bzw. durch Zahlungen begünstigt werden müssen oder ob nicht einseitige Zahlungen an bzw. Belastungen für eine Unternehmung hinreichend sind.[1] Diese Frage soll geprüft werden, indem wir annehmen, daß Unternehmung 1 Zahlungen erhält, Unternehmung 2 aber nicht belastet wird. Wir haben dann die modifizierten Gewinnfunktionen

$$(71) \qquad {}_1\overset{\circ}{G} = \sum_k p_k\, {}_1x_k + p_E\,({}_1x_2 - {}_1\bar{x}_2) - s_1\, {}_1T({}_1x_1, {}_1x_2)$$

$$(72) \qquad {}_2G = \sum_k p_k\, {}_2x_k - s_2\, {}_2T({}_2x_1, {}_2x_2, {}_1x_2)$$

voraus sich über

$$(73a) \qquad \frac{\partial\, {}_1G}{\partial\, {}_1x_1} = p_1 - s_1 \frac{\partial\, {}_1T}{\partial\, {}_1x_1} = 0$$

$$(73b) \qquad \frac{\partial\, {}_1G}{\partial\, {}_1x_2} = p_2 + p_E - s_1 \frac{\partial\, {}_1T}{\partial\, {}_1x_2} = 0$$

$$(74a) \qquad \frac{\partial\, {}_2G}{\partial\, {}_2x_1} = p_1 - s_2 \frac{\partial\, {}_2T}{\partial\, {}_2x_1} = 0$$

---

1) Buchanan-Stubblebine haben nämlich behauptet, nur durch zweiseitige Zahlungsströme ließen sich die Externalitäten internalisieren. (vgl. J. M. Buchanan - W. C. Stubblebine, Externality, in: Economica, Vol. 29 (1962), S. 371 ff.)
Dem ist von Shibata widersprochen worden. (vgl. H. Shibata, Pareto-Optimality, Trade and the Pigovian Tax, in: Economica Vol. 39 (1972), S. 193 ff.)
Dabei bedeutet einseitig, daß nur die die Externalität verursachende Unternehmung der Marginalwirkung der Externalität entsprechend belastet oder begünstigt wird. Die Zahlungen treffen die andere Unternehmung jedoch nicht marginal. Sie können also als lump sum Zahlungen an einen oder aus einem zentralen Fonds z. B. dem Staatshaushalt erfolgen.

(74b) $$\frac{\partial_2 G}{\partial_2 x_2} = p_2 - p_2 \frac{\partial_2 T}{\partial_2 x_2} = 0$$

die Gleichgewichtsbedingung ergibt

(75) $$-\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial_2 x_1}{\partial_2 x_2} = \frac{\partial_1 x_1}{\partial_1 x_2} + \frac{p_E}{p_1}$$

Wird nun der Quasi-Gleichgewichtspreis der Externalität, wie er sich durch den Quasi-Tatonnement-Prozeß in Gleichung (69) ergeben hat, in (75) eingesetzt, erhält man genau die Gleichgewichtsbedingung (68). Das bedeutet, daß einseitige Zahlungen ebenso wie zweiseitige in der Lage sind, Pareto-optimale Quasi-Gleichgewichte zu realisieren.[1)]

Eine sehr starke Erschwerung für die Funktionsfähigkeit des Quasi-Tatonnement-Prozesses stellen marginale reziproke Externalitäten dar, weil sich bei ihnen mit jeder Änderung auf dem Markt für die Externalität ${}_1x_2$ automatisch Bewertungsänderungen für die Externalität auf dem Markt für ${}_2x_2$ ergeben und umgekehrt. Die Bestimmung der Quasi-Gleichgewichtspreise hat also simultan zu erfolgen.[2)] Lediglich bei trennbaren[3)] Externalitäten stellt sich dieses Problem nicht.[4)]

---

1) Anders als hier dargestellt sieht Baumol das Problem. Er behauptet, daß es im Falle negativer externer Effekte geboten sein mag, den Verursacher gar nicht zu belasten und zu geringerem Produktionsumfang zu veranlassen, wenn es nämlich billiger sei, die Betroffenen zu belasten und z. B. zur Umsiedlung aufzufordern. (vgl. W. J. Baumol, On Taxation and the Control of Externalities, in: American Economic Review, Vol. 62 (1972) S. 307 ff.). Dieses Problem der Unteilbarkeit bzw. diese Totalbedingung kann jedoch mit dem hier gewählten marginalistischen Ansatz nicht gelöst werden. (vgl. die Ausführungen über Nicht-Konvexitäten.) Auf jeden Fall besteht nicht notwendig eine Unvereinbarkeit beider Überlegungen.

2) Auf diese Schwierigkeit weisen besonders Davis und Whinston hin. (vgl. O. A. Davis - A. B. Whinston, On Externalities, Information, and the Government - Assisted Invisible Hand, in: Economica, Vol. 33 (1966) S. 303 ff. Siehe auch O. A. Davis - A. B. Whinston, Externalities, Welfare, and the Theory of Games, in: Journal of Political Economy, Vol. 70 (1962), S. 241 ff.)

3) Eine Funktion $F(x_1, x_2)$ heißt trennbar, wenn gilt $F(x_1, x_2) = F_1(x_1) + F_2(x_2)$ Trennbarkeit impliziert $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv 0$

4) Davis und Whinston wählen für ihr Beispiel nicht-trennbare Kostenfunktionen. Schließer hat darauf hingewiesen, daß Trennbarkeit in einer Produktionsfunktion nicht Trennbarkeit in der Kostenfunktion impliziert. Lediglich bei linearen Funktionen trifft das zu (vgl. U. Schlieper, a. a. O., S. 48)

Eine im Rahmen der Theorie der Externalitäten wichtige Unterscheidung spielt im Modell der beiden Unternehmungen keine Rolle, nämlich die Möglichkeit der Ausschließung.[1] Ist für eine Gruppe von durch eine Externalität betroffenen Unternehmungen eine Ausschließung nicht möglich, bedeutet das, daß jede Unternehmung ohne Zahlungen in den Genuß der vom Externalitäten-Gut bereitgestellten Mengen kommt. Die Externalität ist demnach nichts anderes als ein kollektives Gut für die betroffene Gruppe. Die unterschiedlichen Folgen bei ausschließbaren und bei nicht-ausschließbaren Externalitäten wollen wir anhand eines Modells von drei Unternehmungen darstellen, bei dem einseitige positive marginale externe Effekte von Gut $_1x_k$ auf die beiden anderen Unternehmungen ausgeübt werden. Bei Pareto-Optimalität des Quasi-Gleichgewichts muß gelten

$$(76) \qquad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial_j x_1}{\partial_1 x_k} = - \frac{p_k}{p_1}$$

Bedingung (76) erfordert, daß für das Externalitäten-Gut $_1x_k$ die individuellen Grenzraten der Substitution und damit auch die Quasi-Gleichgewichtspreise vertikal addiert werden müssen.[2] Dieser Zusammenhang kann durch die folgende Abbildung verdeutlicht werden.

---

1) Der Begriff des Ausschlußprinzips (exclusion principle) wird von Musgrave als der zentrale Begriff im Rahmen der Diskussion um öffentliche Güter angesehen. (vgl. R.A. Musgrave, Provision for social goods, in: Public Economics, J. Margolis - H. Guitton (eds.) a.a.O., S. 124 ff., siehe auch J.G. Head, Public Goods and Public Policy, in: Public Finance, Vol. 17 (1962), S. 197 ff.)
Eine Ausschließung ist möglich, wenn die externe Vorteile verursachende Wirtschaftseinheit in der Lage ist zu verhindern, daß die begünstigten Wirtschaftseinheiten die Vorteile auch nutzen können. Für eine Nicht-Ausschließbarkeit kann es sowohl technologische als auch ökonomische (kostenmäßige) Gründe geben.
Obwohl die Möglichkeit der Ausschließung nur für den Fall positiver externer Effekte definiert ist, kann sie sinngemäß auf den Fall externer Nachteile ausgedehnt werden, wenn es dem Geschädigten nämlich möglich ist, die Schädigung zu unterbinden (z.B. aufgrund von Rechtsvorschriften).

2) Die Ableitung der kollektiven Angebots- bzw. Nachfragekurve wurde zuerst von Bowen durchgeführt. (vgl. H.R. Bowen, Toward Social Economy, New York 1958, S. 177).

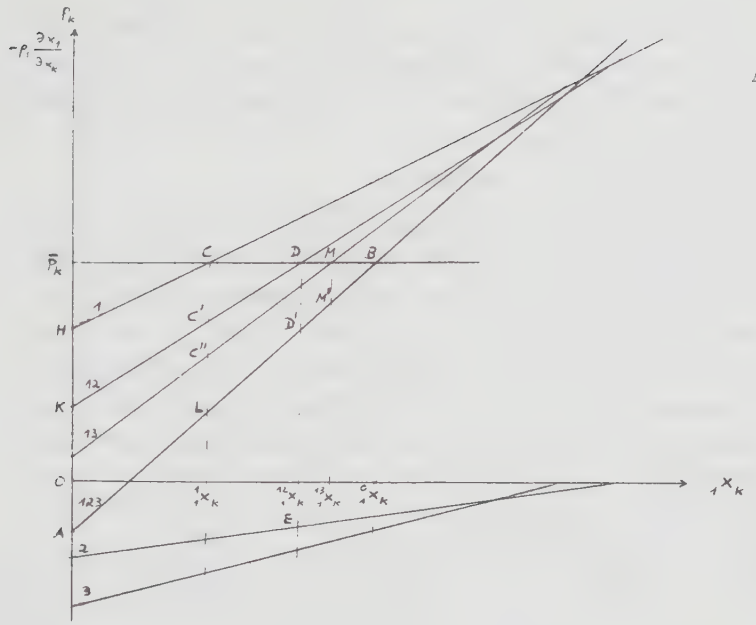


Abb. 2

Die Indizes an den Kurven geben an, welche Grenzraten der Substitution gemäß Gleichung (76) aggregiert werden. Das Pareto-Optimum liegt bei der Menge ${}^{o}_{1}x_k$. Dort wird die Produzentenrente zwischen dem Marktpreis $\bar{p}_k$ und der aggregierten ("sozialen") Angebotskurve 123 maximiert. Kann diese Menge bei einer Möglichkeit der Ausschließung erreicht werden? Unabhängig von der Externalität realisiert Unternehmung 1 zunächst die individuelle (private) Gleichgewichtsmenge ${}^{1}_{1}x_k$. Die Produzentenrente wird durch die private Angebotskurve 1 mit $HC\bar{p}_k$ angegeben. Unternehmung 1 kann jedoch ihre Produzentenrente im Höchstfall um $ALC\bar{p}_k$ erhöhen, wenn sie die anderen Unternehmungen die Effekte der Externalität kompensieren läßt. Unternehmung 1 kann ihre Produzentenrente jedoch weiter erhöhen, indem sie z.B. mit Unternehmung 2 auf dem fiktiven Markt für die Externalität einen Quasi-Gleichgewichtspreis (${}^{12}_{1}x_k E$) für eine Mengenausdehnung auf ${}^{12}_{1}x_k$ aushandelt.

Bei Abschöpfung der Produzentenrente[1] könnte sie die Fläche C'DC zusätzlich erhalten. Wird Unternehmung 3 an den Externalitäten bei ${}^{12}_{1}x_k$ beteiligt, kann Unternehmung 1 zusätzlich maximal die Produzentenrente[2] LD'DC' abschöpfen. In dieser Weise kann Unternehmung 1 fortfahren und schließlich die gesamte Produzentenrente $AB\bar{p}_k$ bei der Pareto-optimalen Menge ${}^{o}_{1}x_k$ für sich abschöpfen.

Dieses Verfahren läßt sich bei beliebig vielen Wirtschaftseinheiten durchführen. Da die Externalität wie ein privates Gut verkauft werden kann, ist nicht daran zu zweifeln, daß der Pareto-optimale Produktionsumfang immer erreicht wird.[3]

Ist eine Pareto-Optimalität auch bei Nicht-Ausschließbarkeit zu erwarten? Ausgangspunkt ist wieder das private Gleichgewicht ${}^{1}_{1}x_k$. Dort realisiert Unternehmung 1 die Produzentenrente $HC\bar{p}_k$, während die beiden anderen ALCH erhalten. Einigen sich Unternehmung 1 und Unternehmung 2 auf den Externalitäten-Markt auf den erweiterten Produktionsumfang ${}^{12}_{1}x_k$, erhält Unternehmung 3 als freier Mitbenutzer eine zusätzliche Produzente LD'DC'. Umgekehrt erhielte, wenn sich Unternehmung 1 und Unternehmung 3 auf den Produktionsumfang ${}^{13}_{1}x_k$ einigen, Unternehmung 2 zusätzlich die Produzentenrente LM'MC". Daraus folgt, daß beide Unternehmungen möglichst nicht in Verhandlungen mit Unternehmung 1 eintreten, sondern stattdessen auf freie Mitnutzung spekulieren werden.[4] Es kann daher fest-

---

1)2) Genau genommen handelt es sich hierbei zum Teil um Nachfragerrenten, die den Unternehmen zwei und drei als Nachfragern auf dem Externalitäten-Markt bei einem Quasi-Gleichgewichtspreis zufallen.

3) Dieses Ergebnis wird allerdings etwas relativiert, wenn man bedenkt, daß die Ausschließung nur angedroht, nie aber tatsächlich durchgeführt werden darf, weil das in jedem Falle Pareto-schädlich wäre. Ob allerdings eine Drohung, von der man weiß, daß sie nicht ausgeführt wird, sehr wirksam ist, darf erheblich bezweifelt werden.

4) Diese Tatsache hat Stubblebine als das Problem des "free riding" bezeichnet. (vgl. W. C. Stubblebine, Institutional Elements in the Financing of Education, in: The Southern Economic Journal, Vol. 32 (1966), S. 21). Seine Bedeutung hängt von verschiedenen Umständen ab. Neben der Größe der betroffenen Gruppe (In einer großen Menge ist man anonym!) spielt ihre Struktur eine wichtige Rolle. In einer Gruppe mit wenigen Reichen und vielen Armen werden die Armen erwarten, daß zunächst einmal die Reichen ein Projekt in Angriff nehmen. Olson spricht in diesem Zusammenhang von der "Ausbeutung der Großen durch die Kleinen". (vgl. M. Olson, The Logic of Collective Action, Cambridge 1965, S. 29). - Forts. S. 99

gestellt werden, daß ein Quasi-Konkurrenzsystem, aber auch ein System der Optionsfixierung bei nicht-ausschließbaren Externalitäten kein Pareto-optimales (Quasi-) Gleichgewicht erreichen kann, wenn die Zahl der betroffenen Wirtschaftseinheiten hinreichend groß ist. Das marktwirtschaftliche System versagt in diesem Fall.

2. Einführung eines Steuer-Subventions-Mechanismus

Exemplarisch soll anhand des Beispiels eines Steuer-Subventions-Mechanismus erörtert werden, ob der Staat Möglichkeiten hat, für die Internalisierung von Externalitäten zu sorgen. Der Steuer-Subventions-Mechanismus bewirkt eine Verschiebung der Marktpreise und führt daher zu Mengenreaktionen der Anbieter und Nachfrager. Für Güter (Faktoren) mit positiven marginalen externen Effekten wird der Marktpreis erhöht (gesenkt), also eine Subvention gezahlt, und entsprechend umgekehrt bei negativen marginalen externen Effekten. Wie müssen die Steuern bzw. Subventionen festgelegt werden, damit ein Pareto-optimales Gleichgewicht erreicht wird? Im Modell mit 2 Unternehmungen mit einem privaten und einem einseitigen Externalitäten-Gut gilt

$$(77) \qquad {}_1G = p_1\,{}_1x_1 + (p_2 + t)\,{}_1x_2 - p_1\,{}_1T({}_1x_1, {}_1x_2)$$

und

$$(78) \qquad {}_2G = p_1\,{}_2x_1 + p_2\,{}_2x_2 - p_2\,{}_2T({}_2x_1, {}_2x_2, {}_1x_2)$$

Dieses ist das unter Gleichungen (71) - (74) beschriebene Modell mit dem einzigen Unterschied, daß hier alle Einheiten des Externalitäten-Gutes subventioniert werden, während dort nur die über die privaten Gleichgewichtsmengen hinaus gehenden Einheiten kompensiert wurden. Gelingt es demnach, t so festzulegen, daß gilt

$$(79) \qquad t = p_1 \frac{\partial_2 x_1}{\partial_1 x_2}$$

Darüber hinaus halten sich die Armen für nicht zahlungskräftig genug. (Stubblebine, ebenda, bezeichnet das als den "impotent giver.") Natürlich spielen auch die Repressionsmöglichkeiten der Gruppe gegen zahlungsunwillige Mitglieder eine Rolle u.a.m.

kann ein Pareto-optimales Gleichgewicht erreicht werden. Wie aber kann die Bestimmung von t erfolgen? Der Staat benötigt dazu alle Informationen, die auf dem fiktiven Externalitäten-Markt gewonnen werden. Er ist also auf die Mithilfe der Betroffenen angewiesen. Deren Interesse kann es aber nicht sein, korrekte Bewertungen vorzunehmen und richtige Informationen weiterzugeben. Es lohnt sich immer, die Wirkung der Externalität zu übertreiben, wenn man selber nichts bezahlen muß bzw. zu untertreiben, wenn man mit zahlen muß. Während man also beim Tatonnement-Prozeß ein Eigeninteresse an korrekten Informationen vermuten kann, ist dies bei einer staatlichen Aktivität nicht im gleichen Maße der Fall. [1)]

Wir stellen fest, daß auch durch staatliche Aktivität ein Pareto-optimales Gleichgewicht erreicht werden kann. Die Probleme der Informationsbeschaffung sind für ihn jedoch mindestens so groß wie für die privaten Wirtschaftseinheiten.

3. Ein "korrekt" dezentralisiertes System

Neben der Möglichkeit, einen Markt für Externalitäten zu konstruieren und auf ihm in einer Art Tatonnement-Prozeß einen Quasi-Konkurrenzpreis für jede Externalität zu bestimmen, gibt es andere Möglichkeiten der Verhandlung zwischen den betroffenen Wirtschaftseinheiten. Eine davon ergibt sich aus folgender Überlegung: Bei der Analyse des Konkurrenzsystems in III B hatten wir angenommen, daß alle Wirtschaftseinheiten in ihren Zielfunktionen und Nebenbedingungen nur Variable haben, die sie selber kontrollieren. Diese Annahme

---

1) Neben dem Problem der korrekten Offenlegung der richtigen Informationen besteht das Problem der Erlangung der richtigen Informationen. Im Konsumbereich spricht Musgrave in ähnlichem Zusammenhang von "merit wants". (vgl. R.A. Musgrave, Theory ... a.a.O., S. 13 f.) Beschränkt sich der Staat wegen dieser Probleme auf das Ziel einer Pareto-Verbesserung, steht ihm eine ganze Reihe von Maßnahmen zur Verfügung. Man vergleiche die Aufzählung bei Davis und Kamien. (O.A. Davis - M.I. Kamien, Externalities, Information, and Alternative Collective Action, in: Public Expenditures and Policy Analysis, R.H. Haveman - J. Margolis (eds.) Chicago 1971, S. 74 ff.)

konnte bei Vorliegen von Externalitäten nicht aufrecht erhalten werden. Dadurch weichen Gleichgewichts- und Pareto-Optimalbedingungen voneinander ab. Das bedeutet aber auch, daß, wenn es gelingt, die Entscheidungseinheiten in der Weise zu wählen, daß ihre Zielfunktion und ihre Nebenbedingung nur Variable enthalten, die sie selbst kontrolliert, die individuellen Gleichgewichte Pareto-Optimalität garantieren. Im Produktionsbereich bedeutet das, daß die von einer Externalität betroffenen Unternehmungen kooperieren. Dabei meint kooperieren, daß zentral über die Produktionspläne der Unternehmungen entschieden wird,[1] wobei der zentrale Entscheidungsträger bemüht ist, den gemeinsamen Gewinn der Unternehmungen zu maximieren.

Es soll angenommen werden, daß es durch die Kooperation zu keiner Monopolisierung des Marktes kommt, die Annahmen der vollständigen Konkurrenz also aufrechterhalten werden können. Für die kooperierende Unternehmensgruppe[2] gilt im Falle eines privaten und eines einseitigen Externalitäten-Gutes

$$(80) \quad G = {}_1G + {}_2G = \sum_j \sum_k p_{kj} x_k - \rho_{11} T(x_{11}, x_{21}) - \rho_{22} T({}_2x_{12}, {}_2x_{22}, x_{32})$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum verlangen

$$(81a) \quad \frac{\partial G}{\partial_1 x_1} = p_1 - \rho_1 \frac{\partial_1 T}{\partial_1 x_1} = 0$$

$$(81b) \quad \frac{\partial G}{\partial_1 x_2} = p_2 - \rho_1 \frac{\partial_1 T}{\partial_1 x_2} - \rho_2 \frac{\partial_2 T}{\partial_1 x_2} = 0$$

$$(81c) \quad \frac{\partial G}{\partial_2 x_1} = p_1 - \rho_2 \frac{\partial_2 T}{\partial_2 x_1} = 0$$

---

1) Diese zentrale Entscheidung kann im Sinne einer echten Fusion erfolgen oder durch einen mehrstufigen Rückkopplungsprozeß, wie ihn Baumol-Fabian beschrieben haben. (vgl. W. J. Baumol-T. Fabian, Decomposition, Pricing for Decentralization, and External Economies, in: Management Science, Vol. 11 (1964), S. 1 ff.)

2) Sie soll sich aus zwei Unternehmungen zusammensetzen.

$$(81d) \qquad \frac{\partial G}{\partial_2 x_2} = p_2 - \rho_2 \frac{\partial_2 T}{\partial_2 x_2} = 0$$

mit der Gleichgewichtsbedingung

$$(82) \qquad -\frac{p_2}{p_1} = \frac{\partial_1 x_1}{\partial_1 x_2} + \frac{\partial_2 x_1}{\partial_1 x_2} = \frac{\partial_2 x_1}{\partial_2 x_2}$$

Dieses ist genau die Bedingung für ein Pareto-optimales Quasi-Gleichgewicht (68). Eine Kooperation ermöglicht es also, individuelle Gleichgewichte zu realisieren, die Pareto-optimal sind.[1)]

Die Bedingungen zweiter Ordnung verlangen

$$(83) \qquad G'' = (\,_1T_1)^2(\,_2T_1)^2(-\rho_1\,_1T_1)(-\rho_2\,_2T_1) \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2\,_1x_1}{(\partial_1 x_2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial^2\,_2x_1}{(\partial_2 x_2)^2} \end{vmatrix}$$

$$+(\,_1T_1)^2(\,_2T_1)^2(-\rho_2\,_2T_1)^2 \begin{vmatrix} -\frac{\partial^2\,_2x_1}{(\partial_2 x_2)^2} & -\frac{\partial^2\,_2x_1}{\partial_2 x_2\,\partial_1 x_2} \\ -\frac{\partial^2\,_2x_1}{\partial_2 x_2\,\partial_1 x_2} & -\frac{\partial^2\,_2x_1}{(\partial_1 x_2)^2} \end{vmatrix} > 0$$

Es müssen also nicht nur die eigenen Variablen die Konvexitätsbedingungen erfüllen (1. Summand), sondern auch die Externalität (2. Summand). Dieses Ergebnis hatten wir bereits beim Quasi-Konkurrenzgleichgewicht in Gleichung (70) gefunden.

Das Ergebnis erlaubt uns die Schlußfolgerung, daß Externalitäten a priori noch kein Einwand gegen den Marktmechanismus, sondern gegen eine zu weitgehende ("falsche") Dezentralisierung sind. Durch eine Aufhebung dieser Dezentralisierung gelingt eine Internalisierung der Externalitäten. Bedingung dabei ist, daß es nicht zu Pareto-schädlichen Monopolbildungen kommt.

4. Spieltheoretische Aspekte

Der Fall reziproker nicht-trennbarer Externalitäten beinhaltet noch ein weiteres

---

1) Dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden: Während individuelle Gleichgewichte durch Maximierung des individuellen Gewinns gefunden werden, werden Pareto-optimale gesamtwirtschaftliche Gleichgewichte durch Maximierung des Gesamtgewinnes der Volkswirtschaft gefunden. (vgl. unsere Ableitungen bei III B 2 und III D.)

Problem. Wir wollen annehmen, daß beide Unternehmungen ihre gleichgewichtigen und ihre Pareto-optimalen Mengen kennen. Für beide ist es jedoch gewinnbringend, selber nur die gleichgewichtige Menge zu produzieren und darauf zu spekulieren, daß der andere die Pareto-optimale Menge bereitstellt. Der maximale gemeinsame Gewinn wird aber erreicht, wenn beide die Pareto-optimale Menge produzieren. Unter diesen Umständen möge sich die folgende Matrix der erreichbaren Gewinne ergeben

2 \ 1	G	P
G	10 ; 10	8 ; 25
P	25 ; 8	20 ; 20

Durch G wird die gleichgewichtige und durch P die Pareto-optimale Menge gekennzeichnet. Produzieren beide Unternehmungen die gleichgewichtigen Mengen (G, G), ergibt sich für beide ein Gewinn von 10. Produziert Unternehmung 1 die gleichgewichtige und Unternehmung 2 die Pareto-optimale Menge (G, P), erhält die erste einen Gewinn von 25 und die zweite von 8. Entsprechendes gilt für die Kombinationen (P ,G) und (P, P).

Die Gewinnmatrix charakterisiert ein nicht-kooperatives Zwei-Personen Nicht-Nullsummenspiel.[1)2)] Welche Lösungspunkte sich in diesem Spiel ergeben, hängt von den Annahmen über die individuelle Risikofreudigkeit und die Kooperationsmöglichkeiten ab. Versuchen beispielsweise beide, ihr Sicherheitsniveau zu maximieren[3)], werden sie die Minimax-Strategie wählen. Der Lösungspunkt ist hierbei die Verhaltensweise (G, G), also das individuelle

---

1) Auf die spieltheoretische Natur des Problems der Gleichgewichtsbestimmung bei öffentlichen Gütern hat Samuelson schon frühzeitig hingewiesen. (vgl. P. A. Samuelson, Aspects of Public Expenditure Theories, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 40 (1958), S. 334).

2) Zu den spieltheoretischen Begriffen vergleiche Mc Kinsey, Owen, Luce-Raiffa u. a. m. (J. Mc Kinsey, Introduction to the Theory of Games, New York-Toronto-London, 1952; G. Owen, Game Theory, Philadelphia-London-Toronto 1968; R. D. Luce-H. Raiffa, Games and Decisions, New York 1957).

3) vgl. die ähnliche Analyse bei Krause-Junk, (G. Krause-Junk, Spieltheoretische Elemente in der "reinen" Theorie öffentlicher Ausgaben, in: Jahrbuch für Sozialwissenschaft, Bd. 21 (1970), S. 12 ff., insbesondere S. 19 ff.)

Gleichgewicht. Auch bei der extrem risikofreudigsten Strategie, nämlich der Wahl der Maßnahme mit dem absolut größten Gewinn, ergibt sich der gleiche Lösungspunkt (G, G). Wird das Spiel Zug um Zug durchgeführt, kann eine Verhaltensweise der Mengenanpassung angenommen werden. Auch in diesem Fall liegt der Lösungspunkt bei (G, G).[1)]

Natürlich ist dieser Lösungspunkt kein optimaler Punkt. In ihm kann sich weder die individuelle Unternehmung noch können sich beide zusammen den größtmöglichen Gewinn sichern. Das Optimum liegt vielmehr bei der Situation (P, P), also bei den Verhaltensweisen, die beide nicht selbständig wählen. Es muß daher zu einer Kooperation zwischen beiden Unternehmungen kommen. Dies kann durch eine Absprache zwischen beiden geschehen, wodurch sofort das gemeinsame Optimum erreicht wird. Das kann aber auch dadurch geschehen, daß eine Unternehmung versucht, bei der anderen einen Lernprozeß in Gang zu setzen, indem sie temporär[3)] die Maßnahme P wählt, die andere also kostenlos mitnutzen läßt. Die Drohung, jederzeit zur Maßnahme G zurückzukehren, sollte dann bewirken, daß sich beide auf die Maßnahme P einigen, also gemeinsam das Pareto-Optimum realisieren.

Diese Überlegungen bestätigen die oben gefundenen Ergebnisse: Individuelle Gewinnmaximierung bzw. nicht-kooperative Verhalten führen zu nicht Pareto-optimalen Gleichgewichten, da die Externalitäten nicht internalisiert werden.

Dagegen können durch gemeinsame Gewinnmaximierung wegen der Internalisierung des Externalitäten Pareto-optimale modifizierte Gleichgewichtige erreicht werden. Dies gilt jedoch nicht für nicht-ausschließbare Externalitäten im Falle einer großen Zahl von betroffenen Wirtschaftseinheiten. Auf diese Situation können wir das a priori Argument für ökonomische staatliche Aktivität begrenzen.

---

1) In allen diesen Fällen ergibt sich (G, G) als Lösungspunkt, weil für beide Unternehmungen Verhalten G P dominiert.
2) Diese Situation wird unter der Bezeichnung "Prisoner's Dilemma" verstanden.
3) Das setzt voraus, daß das Spiel beliebig oft wiederholt wird.

V. Optimalität bei Nicht-Konvexitäten und Externalitäten

In den vorhergehenden Teilen ist untersucht worden, welche Hindernisse einerseits durch individuelle Nicht-Konvexitäten bei Abwesenheit von Externalitäten und andererseits durch Externalitäten bei Abwesenheit von Nicht-Konvexitäten einer möglichen Pareto-Optimalität eines Gleichgewichts entgegenstehen. In diesem Teil soll anhand eines Beispiels untersucht werden, ob zusätzliche Probleme auftreten, wenn sowohl Nicht-Konvexitäten als auch Externalitäten vorliegen. Insbesondere wird die Frage diskutiert werden müssen, ob die von Pigou aufgestellte These, daß unter den Annahmen der vollständigen Konkurrenz eine Aktivität, die positive marginale externe Effekte ausübt, im individuellen Gleichgewicht in unteroptimalem Umfang bereitgestellt wird, immer aufrechterhalten werden kann.

A. Das Beispiel von Buchanan und Kafoglis[1)]

Buchanan-Kafoglis gehen von zwei Personen A und B aus, die die Möglichkeit haben, sich bis zu höchstens viermal impfen zu lassen. Durch die Impfungen werden die erwarteten Krankheitskosten[2)] reduziert. Die Impfungen erfolgen allerdings nicht kostenlos; jede Impfung kostet p = 10 Einheiten. Ziel der beiden Personen soll es sein, ihre individuellen Gesamtkosten (erwartete Krankheitskosten plus Impfungskosten) zu minimieren.

Von den Impfungen des einen profitiert naturgemäß auch der andere. Es liegt also ein Fall reziproker positiver externer Effekte vor. Die externen Effekte sollen marginal sein: Je mehr Impfungen der eine erhält, umso niedriger sind die Krankheitskosten des anderen. Mit diesen Annahmen konstruieren Buchanan-Kafoglis eine Kostenmatrix

---

1) J. M Buchanan - M. Z. Kafoglis, A Note on Public Goods Supply, in: American Economic Review, Vol. 53 (1963), S. 403 ff.

2) Die Krankheitskosten können beispielsweise durch den Verdienstausfall angegeben werden, der im Falle eines Krankenhausaufenthalts eintreten würde.

A \ B	b_0		b_1		b_2		b_3		b_4	
	100 (100)	200	60 (50)	120	45 (25)	90	30 (16)	76	29 (8)	77
a_6	0 (0)	100 (100)	0 (10)	60 (60)	0 (20)	45 (45)	0 (30)	30 (46)	0 (40)	29 (48)
	60 (70)	140	45 (45)	110	35 (20)	85	28 (13)	81	25 (7)	82
a_1	10 (0)	70 (70)	10 (10)	55 (55)	10 (20)	45 (40)	10 (30)	38 (43)	10 (40)	35 (47)
	40 (50)	110	32 (29)	91	23 (15)	78	19 (8)	77	18 (6)	84
a_2	20 (0)	60 (50)	20 (10)	52 (39)	20 (20)	43 (35)	20 (30)	39 (38)	20 (40)	38 (46)
	29 (40)	99	23 (23)	86	18 (14)	82	17 (6)	83	16 (5)	91
a_3	30 (0)	59 (40)	30 (10)	53 (33)	30 (20)	48 (34)	30 (30)	47 (36)	30 (40)	46 (45)
	20 (30)	90	17 (22)	89	16 (13)	89	15 (4)	89	14 (3)	97
a_4	40 (0)	60 (30)	40 (10)	57 (32)	40 (20)	56 (33)	40 (30)	55 (34)	40 (40)	54 (43)

Mit a, bzw. b wird die Zahl der Impfungen des A bzw. B bezeichnet. In der linken oberen Ecke jedes der 25 Felder stehen die erwarteten Krankheitskosten für A und (in Klammern) für B. In der linken unteren Ecke stehen die Impfungskosten für 1 und (in Klammern) für B. In der rechten unteren Ecke stehen die Gesamtkosten für A und (in Klammern) für B. Rechts oben schließlich stehen die Totalkosten.

Es geht nun zunächst darum, das individuelle Gleichgewicht zu finden, wenn für beide Personen die Verhaltensweise der Mengenanpassung unterstellt wird. Das bedeutet, daß jeder von gegebenen Mengen des anderen ausgeht und die dazu gesamtkostenminimale eigene Menge bestimmt. Für A ergibt sich so die folgende Reihe individueller Gleichgewichte

$(a_3 b_0)$, $(a_2 b_1)$, $(a_2 b_2)$, $(a_0 b_3)$ und $(a_0 b_4)$

Entsprechend lautet die Reihe für B

$(a_0 b_2)$, $(a_1 b_2)$, $(a_2 b_2)$, $(a_3 b_1)$ und $(a_4 b_0)$

Das Konkurrenzgleichgewicht wird durch eine Kombination angegeben, die für

beide individuelles Gleichgewicht ist. Dies ist nur für $(a_2 b_2)$ der Fall. Dort beträgt die Gesamtmenge an Impfungen vier und die Totalkosten 78 Einheiten.[1] Das Gleichgewicht ist aber kein Pareto-Optimum.[2] Das Optimum liegt vielmehr bei der Kombination $(a_0 b_3)$ mit einer Gesamtmenge an Impfungen von drei und Totalkosten von 76 Einheiten.

Dieses Ergebnis interpretieren Buchanan und Kafoglis als eine Beschränkung der Allgemeingültigkeit der These Pigou's.[3] Eine Allokationspolitik auf der Grundlage eines Steuer-Subventions-Mechanismus könnte demnach ebenso eine Pareto-Verschlechterung bewirken wie eine Allokationspolitik gemäß den Preisen im Quasi-Konkurrenzgleichgewicht, da sie möglicherweise zu verstärkten Abweichungen zwischen Gleichgewicht und Optimum führen.

Wenn aber ein Allokationsziel bei zwei gleichen Sachverhalten genau entgegengerichtete Maßnahmen erfordert, ist eine sinnvolle Allokationspolitik nicht möglich.

B. Analyse des Beispiels

Pigou geht bei seiner These von Märkten aus, auf denen die Annahmen der vollständigen Konkurrenz erfüllt sind. Eine enge Interpretation dieser Annahmen verlangt, daß die Konvexitätsbedingungen erfüllt sind. Es kann daher nicht ausgeschlossen werden, daß das Beispiel von Buchanan und Kafoglis auf einer Verletzung der Konvexitätsbedingungen basiert. Um das zu überprüfen, ist es zweckmäßig, die diskrete Darstellungsweise aufzugeben und stetige, zweimal differenzierbare Funktionen zu unterstellen.

Es gilt dann

(84a) $${}_A R = p\,a + {}_A C(a, b)$$

(84b) $${}_B R = p\,b + {}_B C(a, b)$$

---

1) Die Zahlen sind so gewählt, daß nur eine einzige Kombination ein Konkurrenzgleichgewicht darstellt. Prinzipiell sind jedoch auch multiple Gleichgewichte möglich.

2) Buchanan-Kafoglis bezeichnen die Kombination als Pareto-Optimum, bei der die Totalkosten minimiert werden. Diese Definition weicht von der üblichen, auch hier gewählten entscheidend ab, wie wir noch sehen werden.

3) Die optimale Impfungsmenge für A ist geringer als seine gleichgewichtige Impfungsmenge. Darüber hinaus ist auch die gesamte Impfungsmenge im Optimum geringer als im Gleichgewicht.

Dabei bedeuten ${}_AR$ und ${}_BR$ die Gesamtkosten der Personen A und B, p den Preis einer Impfung, a und b die Zahl der Impfungen von A und B und schließlich ${}_AC$ und ${}_BC$ die Krankheitskosten für A und B. [1]

Für die Krankheitskosten gilt annahmegemäß [2]

$$
(85)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial {}_AC}{\partial a} &= {}_AC_a < 0 \\
\frac{\partial {}_AC}{\partial b} &= {}_AC_b < 0 \\
\frac{\partial {}_BC}{\partial a} &= {}_BC_a < 0 \\
\frac{\partial {}_BC}{\partial b} &= {}_BC_b < 0
\end{aligned}
$$

---

1) Bei dieser Formulierung ist nicht ganz klar, ob ${}_AC$ (bzw. ${}_BC$) als Output oder als Input aufzufassen ist. Unterstellt man beispielsweise eine Produktionsbedingung

${}_AT(a, b, {}_AC) = 0$

dann muß ${}_AC$ als Output interpretiert werden, der mit Hilfe der Inputs a und b produziert wird. Die Produktionsbedingung kann aber nicht Gleichung (5'') erfüllen. Diese Interpretation ist also nicht konsistent. Unterstellt man dagegen eine Produktionsbedingung

${}_AT(a, b, {}_AC, g) = 0$

dann kann ${}_AC$ als Input interpretiert werden. Die neue Variable g gibt einen irgendwie bestimmbaren Output, z.B. den gesundheitlichen Status, an. Bei dieser Interpretation kann Gleichung (5'') erfüllt werden. Auf der Isoquante $g = \bar{g}$ gilt dann

$\frac{\partial {}_AC}{\partial a}, \frac{\partial {}_AC}{\partial b}, \frac{\partial a}{\partial b} < 0$. Ferner beschreibt sie eine Funktion

${}_AC = {}_AC(a, b)$.

Für diese Funktion verlangen die Konvexitätsbedingungen

$$
{}_AC_{aa}, {}_AC_{bb} > 0, \quad \begin{vmatrix} {}_AC_{aa} & {}_AC_{ab} \\ {}_AC_{ab} & {}_AC_{bb} \end{vmatrix} > 0
$$

2) In diesem Abschnitt werden die Variablen a und b als positiv angesehen. Damit ist eine Übereinstimmung mit Buchanan und Kafoglis besser möglich. Allerdings ändern sich dadurch einige Vorzeichen bei den Konvexitätsbedingungen.

Da a und b substitutive Faktoren sind, gilt aufgrund des Edgeworth-Pareto-Fisher Maßes[1)]

(86a) $$\frac{\partial^2 {}_A C}{\partial a \, \partial b} = {}_A C_{ab} > 0$$

(86b) $$\frac{\partial^2 {}_B C}{\partial a \, \partial b} = {}_B C_{ab} > 0$$

Die Konvexitätsbedingungen sind für die Krankheitskostenfunktion erfüllt, wenn die Krankheitskosten in jedem beliebigen Punkt (a, b) höchsten gleich sind einer linear konvexen Kombination der Krankheitskosten von Punkten, deren lineare Kombination den Punkt (a, b) ergibt. Für A verlangt das speziell

(87) $${}_A C\,(\alpha\,(a,b) + (1-\alpha)\,(a',b')) \leqslant \alpha\, {}_A C\,((a,b)) + (1-\alpha)\, {}_A C\,((a',b'))$$

mit $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

Entsprechende Ungleichungen gelten für ${}_B C\,(a,b)$, ${}_A R\,(a,b)$, ${}_B R\,(a,b)$ und $R\,(a,b) = {}_A R + {}_B R$ [2)]

Eine Überprüfung der Kostenmatrix gemäß Ungleichung (87) ergibt für A in folgenden Punkten eine Verletzung der Konvexitätsbedingungen, nämlich in $(a_1 b_1)$, $(a_1 b_2)$, $(a_1 b_3)$, $(a_1 b_4)$, $(a_2 b_1)$ und $(a_3 b_1)$.

Eine entsprechende Überprüfung der Krankheitskostenfunktion für B zeigt eine ähnliche Situation.

Damit auch die Totalkostenfunktion die Konvexitätsbedingungen verletzt, ist notwendige Bedingung, daß mindestens ein, und hinreichende Bedingung, daß beide Gesamtkostenfunktionen sie nicht erfüllen. Jedoch ist die Nicht-Konvexität keine notwendige Bedingung für das Ergebnis von Buchanan und Kafoglis, wie das folgende Gegenbeispiel zeigt.

---

1) vgl. P. A. Samuelson, Foundations,..., a. a. O., S. 183
2) Die Summe aus konvexen Funktionen ist wieder eine konvexe Funktion.

A \ B	b_0		b_1		b_2		b_3		b_4	
a_0	222 (170)	392	160 (140)	320	110 (122)	272	82 (105)	247	80 (96)	256
	0 (0)	222 (170)	0 (20)	160 (160)	0 (40)	110 (162)	0 (60)	82 (165)	0 (80)	80 (176)
a_1	186 (154)	360	130 (126)	296	92 (109)	261	72 (97)	249	70 (88)	258
	20 (0)	206 (154)	20 (20)	150 (146)	20 (40)	112 (149)	20 (60)	92 (157)	20 (80)	90 (168)
a_2	152 (140)	332	106 (114)	280	77 (100)	257	63 (90)	253	62 (82)	264
	40 (0)	192 (140)	40 (20)	146 (134)	40 (40)	117 (140)	40 (60)	103 (150)	40 (80)	102 (162)
a_3	122 (128)	310	84 (104)	268	64 (93)	256	56 (84)	260	55 (78)	273
	60 (0)	182 (128)	60 (20)	144 (124)	60 (40)	124 (133)	60 (60)	116 (144)	60 (80)	115 (158)
a_4	104 (118)	302	76 (97)	273	56 (87)	263	50 (79)	269	49 (76)	285
	80 (0)	184 (118)	80 (20)	156 (117)	80 (40)	136 (127)	80 (60)	130 (139)	80 (80)	129 (156)

In dieser Matrix wird unterstellt, daß der Impfpreis p = 20 beträgt.

Auf eine andere mögliche Ursache weisen Buchanan und Kafoglis selber hin, nämlich auf exzessive Externalitäten.[1] Sie liegen im Punkt $(a_o b_2)$ vor.[2]

Jedoch sind auch sie keine notwendige Bedingung, da sie durch eine Veränderung von ${}_A C\,(a_1 b_2)$ und ${}_A C\,(a_2 b_1)$ beseitigt werden können[3], ohne daß sich dadurch das Gleichgewicht oder das Optimum ändern.

Da weder Nicht-Konvexitäten noch exzessive Externalitäten allein eine notwendige Bedingung sind, kann vermutet werden, daß Konvexitäten und fehlende exzessive Externalitäten zusammen eine hinreichende Bedingung dafür sind, daß im Optimum die Gesamtmenge an Impfungen größer als im Gleichgewicht ist. Diese Vermutung soll nun geprüft werden, indem das Beispiel als Dyopolproblem[4] interpretiert wird.[5]

---

1) Exzessive Externalitäten liegen dann vor, wenn eine fremde Impfung die eigenen Krankheitskosten mehr senkt als die eigene. Dann gilt ${}_A C_a > {}_A C_b$ bzw. ${}_B C_b > {}_B C_a$. Vincent spricht von "mehr-als-vollständiger Substitutivität" statt von exzessiver Externalität. (vgl. P. E. Vincent, Reciprocal Externalities and Optimal Input and Output Levels, in: American Economic Review, Vol. 59 (1969), S. 976)

2) Dort ist ${}_A C_a = -10$ und ${}_A C_b = -15$

3) ${}_A C\,(a_1 b_2) = 30 \quad {}_A C\,(a_2 b_1) = 29$

4) Zur Theorie des Dyopols vgl. H. Jacob, Preispolitik, Wiesbaden 1963, S. 153 ff., W. Krelle, Preistheorie, Tübingen 1961, S. 247 ff., R. Richter, Preistheorie, a. a. O., S. 176 ff.

5) Die von Buchanan und Kafoglis beschriebene Situation kann als ein 2 Personen-Nicht-Nullsummenspiel von der Art des Prisoner's Dilemma und damit als ein spezielles Dyopolproblem aufgefaßt werden. Hier wie dort handelt es sich um ein Extremwertproblem, bei dem die Zielfunktion von zwei Variablen abhängt, die jeweils Aktionsparameter nur einer der beiden Personen sind. Im Dyopol sind es der eigene und der fremde Preis, die die Gewinne bestimmen. Hier sind es die eigene und die fremde Menge an Impfungen, aus denen sich die Gesamtkosten ergeben. Nimmt man Scitovsky's Unterscheidung wieder auf, kann man sagen, daß im Dyopol pekuniäre Externalitäten über einen Preismechanismus marktmäßig, hier jedoch technologische Externalitäten über Mengenvariationen nicht marktmäßig internalisiert werden.

Aus Gleichung (84) können die Bedingungen für ein individuelles Gleichgewicht bei Mengenanpasserverhalten abgeleitet werden. Es gilt nämlich

(88a) $$\frac{\partial {}_A R}{\partial a} = p + {}_A C_a = 0$$

(88b) $$\frac{\partial {}_B R}{\partial b} = p + {}_B C_b = 0$$

Gleichung (88a) charakterisiert bei vorgegebenen Mengen b die für A kostenminimalen Mengen a und stellt daher die Reaktionskurve des A dar. Die Reaktionskurve wird auch als Kammlinie bezeichnet. Entsprechend beschreibt (88b) die Kammlinie für B. Im Schnittpunkt der beiden Kammlinien liegt der Polypolpunkt P. Durch ihn wird das individuelle Gleichgewicht beschrieben. In ihm gilt

(89) $$-p = {}_A C_a = {}_B C_b$$

Auf sämtlichen Punkten der Kammlinie des A beträgt wegen (84a) und (88a) die Steigung von Isogesamtkostenlinien

(90a) $$-\frac{db}{da} = 0$$

Entsprechend gilt auf der Kammlinie des B

(90b) $$-\frac{db}{da} = \infty$$

Wegen der Unterschiedlichkeit der Steigungen der Isogesamtkostenlinien kann der Polypolpunkt kein Pareto-optimaler Punkt sein. Pareto-optimale Punkte sind vielmehr alle Punkte, für die die Gesamtkosten des einen bei gegebenen Gesamtkosten des anderen minimiert werden.[1] Die Verbindungs-

---

1) Pareto-optimale Punkte werden über folgenden Ansatz ermittelt

$$R^* = {}_A R(a, b) + \sigma\left({}_B \bar{R} - {}_B R(a, b)\right) \rightarrow \text{Min}$$

mit

$$\frac{\partial R^*}{\partial a} = p + {}_A C_a - \sigma\, {}_B C_a = 0$$

$$\frac{\partial R^*}{\partial b} = {}_A C_b - \sigma\left(p + {}_B C_b\right) = 0$$

Daraus ergibt sich die Marginalbedingung $$\frac{p + {}_A C_a}{{}_A C_b} = \frac{{}_B C_a}{p + {}_B C_b}$$

Sie besagt, daß in einem Pareto-Optimum sich Isogesamtkostenlinien der beiden tangieren müssen.

linie aller Pareto-optimalen Punkte ist die Maximallinie. Auf ihr gilt

$$(91) \qquad -\left.\frac{db}{da}\right|_{AR} = \frac{p + {}_{A}C_a}{{}_{A}C_b} = \frac{{}_{B}C_a}{p + {}_{B}C_b} = -\left.\frac{db}{da}\right|_{BR}$$

bzw.

$$(91') \qquad (p + {}_{A}C_a)(p + {}_{B}C_b) - {}_{A}C_b \, {}_{B}C_a = 0$$

Es kann gezeigt werden, daß die Punkte der Maximallinie, die zum Polypolpunkt Pareto-superior sind, notwendig sowohl ein vermehrtes a als auch ein vermehrtes b aufweisen müssen. Im Polypolpunkt ist nämlich die Steigung der Isogesamtkostenlinie von A gleich null und von B gleich unendlich. Daher liegen für A gesamtkostengünstigere Punkte notwendig bei mehr Impfungsmengen b und für B notwendig bei vermehrtem a. Pareto-superiore Punkte müssen also sowohl vermehrtes a als auch vermehrtes b aufweisen. Pareto-Verbesserungen sind erst dann nicht mehr möglich, wenn Gleichung (91') erfüllt ist.
Damit ist aber gezeigt, daß im individuellen Gleichgewicht beide Güter, wenn sie positive marginale externe Effekte erzeugen, in unteroptimalem Umfang bereitgestellt werden. Dieses Ergebnis bestätigt die These Pigous vollkommen.

Wie aber verträgt sich hiermit das Ergebnis im Beispiel von Buchanan und Kafoglis? Um diese Frage zu klären, definieren wir für das Beispiel einen ganz speziellen Begriff für soziale Optimalität. Ein soziales Optimum liege nämlich dann vor, wenn die Totalkosten minimiert sind.[1] Hier ist

$$(92) \qquad R = {}_{A}R + {}_{B}R = p(a + b) + {}_{A}C(a, b) + {}_{B}C(a, b)$$

Notwendige Bedingung für ein Totalkostenminimum ist $dR = 0$, also

$$(93a) \qquad \frac{\partial R}{\partial a} = p + {}_{A}C_a + {}_{B}C_a = 0$$

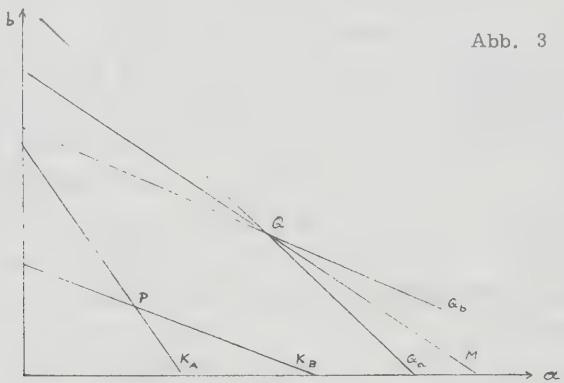
---

1) Diese Begriffsbildung ist berechtigt, da die Totalkostenfunktion als die spezielle Wohlfahrtsfunktion aufgefaßt werden kann, bei der die individuellen Wohlfahrtsniveaus (nämlich ${}_{A}R$ und ${}_{B}R$) gleichgewichtet sind und addiert werden können. Es liegt eine der Auffassung der älteren Wohlfahrtstheorie vergleichbare Situation vor.

(93b) $$\frac{\partial R}{\partial b} = p + {}_{A}C_{b} + {}_{B}C_{b} = 0$$

Natürlich ist das soziale Optimum ein Punkt der Maximallinie, da (93a) und (93b) die Gleichung (91') erfüllen.[1] Darüber hinaus geben (93a) und (93b) den jeweils optimalen Umfang der Mengen a und b an.
Die bisher abgeleiteten Zusammenhänge können in der folgenden Abbildung dargestellt werden.

Abb. 3



K_A und K_B sind die Kammlinien entsprechend den Gleichungen (88a) und (88b) mit dem Polypolpunkt P als Schnittpunkt. M gibt die Maximallinie (91') an. Die Linien optimalen Umfangs von a und b (93a) und (93b) sind mit Q_a und Q_b, ihr Schnittpunkt, das soziale Optimum, mit Q bezeichnet.[2]

Das von Buchanan und Kafoglis abgeleitete Ergebnis bedeutet, daß das soziale Optimum Q innerhalb des Dreiecks liegt, das von den beiden Achsen und als dritter Seite von einer Geraden durch P gebildet wird, die konstante Gesamtimpfungsmengen angibt. Ihre Konstellation kann daher nur eintreten,[3] wenn der Winkel von K_A mit der negativen a-Achse höchstens 45 beträgt. Das ist der Fall, wenn[4]

(94) $$\frac{db}{da} = -\frac{{}_{A}C_{aa}}{{}_{A}C_{ab}} < -1$$

---

1) Wegen ${}_{B}C_{a}$ und ${}_{A}C_{b} < 0$ liegen (93a) bzw. (93b) immer bei größerem a und/oder b als (88a) bzw. (88b).
2) Während die Lage der Schnittpunkte zueinander unbestimmt ist, muß - wie hier eingezeichnet - gelten, daß K_A bzw. Q_a mit der negativen a-Achse einen größeren Winkel bilden als K_B bzw. Q_b. Der Einfachheit halber werden die Kurven linearisiert.
3) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann dieser Fall untersucht werden.
4) Aus (88a) folgt nämlich ${}_{A}C_{aa}da + {}_{A}C_{ab}db = 0$

Die Konvexitätsbedingungen verlangen dann für ${}_{A}R$

(95) $${}_{A}C_{bb} > {}_{A}C_{ab} > {}_{A}C_{aa}$$

und für R

(96) $${}_{A}C_{aa} + {}_{B}C_{aa} + {}_{A}C_{bb} + {}_{B}C_{bb} > 2\,{}_{A}C_{ab} + 2\,{}_{B}C_{ab}$$

Aus (93a) und (93b) ergibt sich die Steigung von Isototalkostenlinien

(97) $$\frac{db}{da} = -\frac{p + {}_{A}C_{a} + {}_{B}C_{a}}{p + {}_{A}C_{b} + {}_{B}C_{b}}$$

Der von Buchanan und Kafoglis dargestellte Fall kann nun nur eintreten, wenn die Steigung der Isototalkostenlinien auf der 45 - Linie durch P mit steigendem b zunimmt und auch positiv wird.[1] Auf der 45 - Linie durch P gilt für die Änderung der Steigung der Isototalkostenlinien

(98) $$\frac{\partial\left(\frac{db}{da}\right)}{\partial \vec{v}} = -\frac{(p + {}_{A}C_{b} + {}_{B}C_{b})({}_{A}C_{ab} - {}_{A}C_{aa} + {}_{B}C_{ab} - {}_{B}C_{aa}) - (p + {}_{A}C_{a} + {}_{B}C_{a})({}_{A}C_{bb} - {}_{A}C_{ba} + {}_{B}C_{bb} - {}_{B}C_{ba})}{(p + {}_{A}C_{b} + {}_{B}C_{b})^{2}}$$

Dabei gibt $\vec{v}$ die Richtung der 45 - Linie an. Gleichung (98) ist in P positiv, wenn entweder $-{}_{A}C_{b}$ erheblich größer als $-{}_{B}C_{a}$ oder aber der linke Klammerausdruck entsprechend größer als der rechte ist. Die letztere Möglichkeit verletzt die Konvexitätsbedingungen. Ist dagegen der rechte Klammerausdruck erheblich größer als der linke (das impliziert eine starke Krümmung der Isototalkostenlinien), kann es möglich sein, daß wegen der Konvexitätsbedingung (95) exzessive Externalitäten vorliegen müssen.[2] Jedoch sind weder exzessive Externalitäten noch Verletzungen der Konvexitätsbedingungen allein oder gemeinsam eine hinreichende Bedingung dafür, daß im sozialen Optimum der Gesamtinput an Faktoren geringer als im individuellen Gleichgewicht sein muß.

---

1) Im Schnittpunkt von 45- Linie und der Q_a - Kurve gilt natürlich $\frac{db}{da} = c$ Hinreichend ist aber erst, daß auch ein Schnittpunkt der 45 - Linie mit der Q_b - Kurve existiert. Dort ist $\frac{db}{da} = \infty$

2) Man kann argumentieren, daß auch ${}_{A}C_{ab} > {}_{A}C_{aa}$ eine Art von exzessiver Externalität bedeutet. Bei einer solchen Interpretation kann das Ergebnis von Buchanan und Kafoglis nicht auftreten, ohne daß exzessive Externalitäten vorliegen.

Wir wollen nun noch die umgekehrte Fragestellung beantworten. Implizieren die Erfüllung der Konvexitätsbedingungen und das Fehlen von exzessiven Externalitäten notwendig, daß im sozialen Optimum insgesamt mehr Faktormengen eingesetzt werden als im individuellen Gleichgewicht? Oder implizieren sie sogar, daß dies für jeden Faktor einzeln zutrifft?
Liegen keine exzessiven Externalitäten (weder in der Form von ${}_{A}C_{a} > {}_{A}C_{b}$ noch in der von ${}_{A}C_{ab} > {}_{A}C_{aa}$) vor, sind beide Kammlinien konvex zum Ursprung. Die Kammlinie von A weist im Polypolpunkt eine Steigung von mehr als 45° auf, während die von B dort eine Steigung von weniger als 45° hat. Auf einer Kammlinie ist der Impfverbrauch insgesamt demnach jeweils größer als im Polypolpunkt. Da jedoch die Maximallinie einen größeren Gesamtimpfverbrauch angibt als die jeweils äußere Kammlinie, muß im sozialen Optimum notwendig ein größerer Gesamtimpfverbrauch bestehen als im individuellen Gleichgewicht.
Wenn dies auch für jede Faktormenge einzeln der Fall sein sollte, müßten die Steigungen der Isototalkostenlinien auf der Vertikalen durch P abnehmen und auf der Waagerechten durch P zunehmen. Dann muß in P gelten

$$(99)\quad \frac{\partial\left(\frac{db}{da}\right)}{\partial b} = \frac{1}{{}_{A}C_{b}^{2}}\left(-{}_{A}C_{b}\left({}_{A}C_{ab}+{}_{B}C_{ab}\right)+{}_{B}C_{a}\left({}_{A}C_{bb}+{}_{B}C_{bb}\right)\right) < 0$$

und

$$(100)\quad \frac{\partial\left(\frac{db}{da}\right)}{\partial a} = \frac{1}{{}_{A}C_{b}^{2}}\left(-{}_{A}C_{b}\left({}_{A}C_{aa}+{}_{B}C_{aa}\right)+{}_{B}C_{a}\left({}_{A}C_{ba}+{}_{B}C_{ba}\right)\right) > 0$$

Diese Bedingungen sind jedoch nur bei ziemlich gleich starken externen Effekten und starker Konvexität der Gesamtkostenfunktionen erfüllt. Sie verlangen eine ungefähre Symmetrie der Kostenfunktionen. Das bedeutet, daß selbst bei Konvexität und Fehlen von exzessiven Externalitäten im sozialen Optimum in der Regel nur von einem Faktor mehr, vom anderen dagegen weniger, insgesamt jedoch mehr an Faktoren eingesetzt wird als im individuellen Gleichgewicht. Die dem Gleichgewicht gegenüber Pareto-superioren Punkte weisen aber von beiden Faktoren notwendig größere Mengen auf.

VI Zusammenfassung

Ausgehend von der Zielsetzung der Maximierung der sozialen Wohlfahrt führt uns die Annahme der Unmöglichkeit interpersoneller Wohlfahrtsvergleiche zu einer Beschränkung auf die Zielsetzung der Pareto - Optimalität als notwendige Bedingung für das soziale Optimum. Diese Beschränkung auf allokative Rationalität ist aber nur dann zulässig, wenn gewährleistet ist, daß der Allokations - und der Distributionsaspekt getrennt werden können.

Alle Pareto - optimalen Punkte werden bei Abwesenheit von Nicht - Konvexitäten und Externalitäten durch bestimmte Marginalbedingungen erster und zweiter Ordnung charakterisiert, die nur ordinale Eigenschaften der Präferenzfunktionen und Transformationsbedingungen benutzen. Bei Vorliegen von Nicht - Konvexitäten müssen die Marginalbedingungen durch andere Bedingungen ersetzt werden. In beiden Fällen läßt sich zeigen, daß das Konkurrenzsystem bzw. ein modifiziertes Konkurrenzsystem in der Lage ist, Pareto - optimale Gleichgewichte zu erreichen, solange die Marktangebots- und -nachfragefunktionen normal verlaufen. Ist das nicht der Fall, kann (mit zusätzlichen Annahmen) nur ein System der Optionsfixierung ein Pareto - optimales Gleichgewicht erreichen.

Liegen Externalitäten vor, ist ein Konkurrenzgleichgewicht nicht mehr Pareto - optimal, da wegen der egoistischen individuellen Zielsetzungen die externen Effekte nicht internalisiert werden können. Jedoch sind dann Modifikationen des Konkurrenzsystems denkbar, durch die eine Möglichkeit zur Internalisierung zumindest bestimmter Arten von Externalitäten gegeben wird. So gelingt dies beispielsweise im Quasi - Konkurrenzsystem für ausschließbare Externalitäten immer und bei nicht - ausschließbaren Externalitäten im Falle einer geringen Zahl von betroffenen Wirtschaftseinheiten. Lediglich bei einer großen Gruppe stellen nicht - ausschließbare Externalitäten ein a priori Argument für ökonomische staatliche Aktivität dar. Es ist jedoch gezeigt worden, daß für einen vom Staat eingeführten Steuer - Subventions - Mechanismus zumindest die gleichen Informationsprobleme bestehen, denen sich auch die Privaten im Quasi - Konkurrenzsystem gegenübersehen. Hingewiesen wurde ferner auf den spieltheoretischen Aspekt in der Form eines Zwei - Personen - Nicht - Nullsummenspiels des Internali-

sierungsproblems. Eine Lösungsmöglichkeit wurde für dieses Spiel in Gestalt einer Kooperation bzw. einer Fusion der Unternehmungen dargestellt.

Dieser letzte Aspekt wurde schließlich in einem Dyopolmodell wieder aufgegriffen. Es konnte dort gezeigt werden, daß bei reziproken marginalen positiven externen Effekten alle einem individuellen Gleichgewicht gegenüber Pareto - superioren Punkte notwendig für alle Faktoren eine größere Inputmenge aufweisen müssen. Dies ist ein Ergebnis, das die These Pigous auf einen allgemeineren Fall erweitert. Jedoch ist die Lage des sozialen Optimums (in seiner speziellen Definition) im Verhältnis zum individuellen Gleichgewicht nicht eindeutig bestimmt. Darüber entscheidet neben der Größe des Konvexitätsmaßes bzw. der Stärke der Konvexität auch, ob die Externalitäten exzessiv sind.

Literaturverzeichnis

C. Abraham - A. Thomas	Micro - Economics, Dordrecht 1973
R. G. D. Allen	Macroeconomic Theory, London 1968
K. J. Arrow	An Extension of the Basic Theorems of Welfare Economics, in: J. Neyman (ed.) Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley 1951
K. J. Arrow - G. Debreu	Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy, in: Econometrica, Vol. 22 (1954)
K. J. Arrow - F. H. Hahn	General Competitive Analysis, San Francisco - Edinburgh 1971
K. J. Arrow - L. Hurwicz	On the Stability of the Competitive Economy, Part I, in: Econometrica, Vol. 26 (1958)
R. J. Aumann	Existence of Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders, in: Econometrica, Vol. 34 (1966)
F. M. Bator	The Anatomy of Market Failure, in: Quarterly Journal of Economics, Vol. 72 (1958)
F. M. Bator	On Convexity, Efficiency, and Markets, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961)
W. J. Baumol	External Economies and Second Order Optimality Conditions, in: American Economic Review, Vol. 54 (1964)
W. J. Baumol	On Taxation and the Control of Externalities, in: American Economic Review, Vol. 62 (1972)
W. J. Baumol - D. F. Bradford	Detrimental Externalities and Non-Convexity of the Production Set, in: Economica, Vol. 39 (1972)

W. J. Baumol - T. Fabian	Decomposition, Pricing for Decentralization, and External Economies, in: Management Science, Vol. 11 (1964)
K. E. Boulding	Einführung in die Wohlfahrtsökonomik, deutsche Übersetzung in: G. Gäfgen (Hrsg), Grundlagen der Wirtschaftspolitik, Köln - Berlin 1966
H. R. Bowen	Toward Social Economy, New York 1958
I. N. Bronstein - K. A. Semendjajew	Taschenbuch der Mathematik, 4. Aufl. Frankfurt - Zürich 1964
J. M. Buchanan	The Demand and Supply of Public Goods, Chikago 1968
J. M. Buchanan - M. Z. Kafoglis	A Note on Public Goods Supply, in: American Economic Review, Vol. 53 (1963)
J. M. Buchanan - W. C. Stubblebine	Externality, in: Economica, Vol. 29 (1962)
J. S. Chipman	A Survey of the Theory of Internatinal Trade, Part 2, The Neo-Classical Theory, in: Econometrica, Vol. 33 (1965)
D. Collard	Prices, Markets and Welfare, London 1972
O. A. Davis - M. I. Kamien	Externalities, Information, and Alternative Collective Action, in: R. H. Haveman - J. Margolis (eds) Public Expenditures and Policy Analysis, Chikago 1971
O. A. Davis - A. B. Whinston	Externalities, Welfare, and the Theory of Games, in: Journal of Political Economy, Vol. 70 (1962)
O. A. Davis - A. B. Whinston	On Externalities, Information, and the Government - Assisted Invisible Hand, in: Economica, Vol. 33 (1966)
G. Debreu	Theory of Value, New York 1959
G. Debreu	Representation of a Preference Ordering by a Numerical Function, in: Readings in Mathematical Economics, Vol. 1 Value Theory, P. Newman (ed) Baltimore 1968

F. T. Dolbear, Jr. — On the Theory of Optimum Externality, in: American Economic Review, Vol. 57 (1967)

R. Dorfman - P. A. Samuelson - R. M. Solow — Linear Programming and Economic Analysis, New York - Toronto - London 1958

M. J. Farrell — The Convexity Assumption in the Theory of Competitive Markets, in: Journal of Political Economy, Vol. 67 (1959)

G. M. Fichtenholz — Differential- und Integralrechnung I, 2. Aufl. Berlin 1966

G. Gäfgen — Theorie der wirtschaftlichen Entscheidung, 2. Aufl. Tübingen 1968

J. de V. Graaff — Theoretical Welfare Economics, Cambridge 1967

J. G. Head — Public Goods and Public Policy, in: Public Finance, Vol. 17 (1962)

J. M. Henderson - R. E. Quandt — Microeconomic Theory, Tokio 1958

J. R. Hicks — The Generalized Theory of Consumer's Surplus, in: Review of Economic Studies, Vol. 13 (1945/46)

J. R. Hicks — Value and Capital, 2. Aufl. Oxford 1957

J. R. Hicks — Die vier Arten der Konsumentenrente, deutsche Übersetzung in: E. und M. Streissler (Hrsg), Konsum und Nachfrage, Köln - Berlin 1966

M.D. Intriligator — Mathematical Optimization and Economic Theory, Englewood Cliffs 1971

H. Jacob — Preispolitik, Wiesbaden 1963

N. Kaldor — The Irrelevance of Equilibrium Economics, in: Economic Journal, Vol. 82 (1972)

T. C. Koopmans — Three Essays on the State of Economic Science, New York 1957

T. C. Koopmans — Convexity Assumptions, Allocative Efficiency, and Competitive Equilibrium, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961)

T. C. Koopmans	Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities, in: T. C. Koopmans (ed), Activity Analysis of Production and Allocation, New York - London 1964
G. Krause - Junk	Das Allokationsoptimum und das Äquivalenzprinzip der Besteuerung, unveröffentlichte Habilitationsschrift Hamburg 1969
G. Krause - Junk	Spieltheoretische Elemente in der "reinen" Theorie öffentlicher Ausgaben, in: Jahrbuch für Sozialwissenschaft, Bd. 21 (1970)
W. Krelle	Preistheorie, Tübingen 1961
R. Kuenne	The Theory of General Economic Equilibrium, Princeton 1963
H. W. Kuhn - A. W. Tucker	Nonlinear Programming, in: J. Neyman (ed), Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley 1951
K. Lancaster	Mathematical Economics, London 1971
O. Lange	On the Economic Theory of Socialism, in: O. Lange - F. M. Taylor (eds), On the Economic Theory of Sosialism, New York - Toronto - London 1966
A. P. Lerner	The Economics of Control, New York 1947
R. G. Lipsey - K. Lancaster	The General Theory of Second Best, in: Review of Economic Studies, Vol. 24 (1956/57)
I. M. D. Little	A Critique of Welfare Economics, 2. Aufl. Oxford 1957
R. D. Luce - H. Raiffa	Games and Decisions, New York 1957
E. Malinvaud	Lectures on Microeconomic Theory, Amsterdam - London - New York 1972
J. Margolis - P. E. Vincent	External Economic Effects, Stanford 1966

A. Marshall	Principles of Economics, 8. Aufl. London 1964
L. Mc Kenzie	On the Existence of General Equilibrium in a Competitive Market, in: Econometrica, Vol. 27 (1959)
J. Mc Kinsey	Introduction to the Theory of Games, New York - Toronto - London 1952
J. E. Meade	External Economies and Diseconomies in a Competitive Situation, in: Economic Journal, Vol. 62 (1952)
M. A. G. van Meerhaeghe	Economics - a Critical Approach, London 1971
H. Meschkowski	Mathematisches Begriffswörterbuch, 2. Aufl., Mannheim 1966
E. J. Mishan	Reflections on Recent Developments in the Concept of External Effects, in: Canadian Journal of Economics and Political Science, Vol. 31 (1965)
E. J. Mishan	The Postwar Literature on Externalities: An Interpretative Essay, in: Journal of Economic Literature, Vol. 9 (1971)
Y. Murakami - T. Negishi	A Note on a Formulation of External Economy, in: International Economic Review, Vol. 5 (1964)
R. A. Musgrave	The Theory of Public Finance, New York - Toronto - London 1959
R. A. Musgrave	Provision of Social Goods, in: J. Margolis - H. Guitton (eds), Public Economics, London 1969
S. K. Nath	A Reappraisal of Welfare Economics, London 1969
M. Olson	The Logic of Collective Action, Cambridge 1965
C. J. Oort	Decreasing Costs as a Problem of Welfare Economics, Amsterdam 1958

G. Owen	Game Theory, Philadelphia - London - Toronto 1968
A. C. Pigou	The Economics of Welfare, 4. Aufl. London 1960
R. Portes	The Search for Efficiency in the Presence of Externalities, in: Unfashionable in Economics, Essays in Honour of Lord Balogh, P. Streeten (ed) London 1970
J. Quirk - R. Saposnik	Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, New York 1968
R. Richter	Preistheorie, Wiesbaden 1963
P. C. Roberts	Oscar Lange's Theory of Socialist Planning, in: Journal of Political Economy, Vol. 79 (1971)
K. Rose	Theorie der Außenwirtschaft, 3. Aufl. Berlin - Frankfurt 1970
J. Rothenberg	Non - Convexity, Aggregation, and Pareto Optimality, in: Journal of Political Economy, Vol. 68 (1960)
J. Rothenberg	Comments on Non - Convexity, in: Journal of Political Economy, Vol. 69 (1961)
N. Ruggles	The Welfare Basis of the Marginal Cost Pricing Principle, in: Review of Economic Studies, Vol. 17 (1949/50)
N. Ruggles	Recent Developments in the Theory of Marginal Cost Pricing, in: Review of Economic Studies, Vol. 17 (1949/50)
P. A. Samuelson	The Pure Theory of Public Expenditures, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 36 (1954)

P. A. Samuelson	Aspects of Public Expenditure Theories, in: Review of Economics and Statistics, Vol. 40 (1958)
P. A. Samuelson	Foundations of Economic Analysis, Cambridge 1963
P. A. Samuelson	Constancy of the Marginal Utility of Income, in: The Collected Scientific Papers of P. A. Samuelson, J. E. Stiglitz (ed), Vol. 1 Cambridge 1966
P. A. Samuelson	The Monopolistic Competition Revolution, in: R. Kuenne (ed), Monopolistic Competition Theory, New York 1967
P. A. Samuelson	Pure Theory of Public Expenditure and Taxation, in: J. Margolis - H. Guitton (eds), Public Economics, London 1969
U. Schlieper	Pareto - Optima, externe Effekte und die Theorie des Zweitbesten, Köln 1969
T. Scitovsky	Two Concepts of Externality, in: Journal of Political Economy, Vol. 62 (1954)
A. K. Sen	Collective Choice and Social Welfare, Edinbourgh - London 1970
H. Shibata	Pareto - Optimality, Trade and the Pigovian Tax, in: Economica, Vol. 39 (1972)
W. C. Stubblebine	Institutional Elements in the Financing of Education, in: Southern Economic Journal, Vol. 32 (1966)
T. Thiemeyer	Grenzkostenpreise bei öffentlichen Unternehmen, Köln - Opladen 1964
R. Turvey	On Divergencies between Social Cost and Private Cost, in: Economica, Vol. 30 (1963)

P. E. Vincent — Reciprocal Externalities and Optimal Input and Output Levels, in: American Economic Review, Vol. 59 (1969)

J. Viner — Cost Curves and Supply Curves, in: Zeitschrift für Nationalökonomie, Bd. 3 (1931) wiederabgedruckt in: G. Stigler - K. E. Boulding (eds), Readings in Price Theory, Chikago 1952

L. Walras — Elements of Pure Economics, englische Übersetzung, Homewood 1954

Lebenslauf

Am 8. 12. 1943 wurde ich, Harald Keiter, als Sohn des Dipl. - Ing. Rudolf Keiter und seiner Ehefrau Marie - Ulla geb. Schroeder in Oschersleben/Bode geboren.

Im Februar 1963 legte ich die Reifeprüfung am Städtischen mathematisch - naturwissenschaftlichen Gymnasium in Wattenscheid ab. Anschließend belegte ich vier Semester lang Mathematik und Physik an der Universität Göttingen. Vom SS 1965 bis zum SS 1969 studierte ich Volkswirtschaft an der Universität Hamburg und bestand dort am 23. 10. 1969 die Prüfung zum Diplomvolkswirt.

Seit November 1969 bin ich wissenschaftlicher Assistent am Institut für Finanzpolitische Forschung der Freien Universität Berlin.

Meine akademischen Lehrer sind Prof. Dr. K. Littmann und Prof. Dr. G. Krause - Junk.

B. Ladewig-Dissertationsdruck - 1 Berlin 12-Pestalozzistraße 106
Tel.: 3 12 88 85 - 3 13 81 98